

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 16 settembre 1906.

~~~~~

**Astronomia.** — *Riassunto delle osservazioni dell'eclisse totale di sole del 30 agosto 1905, fatte ad Alcalà de Chivert (Spagna).* Nota del Corrispondente A. Riccò.

Ho l'onore di presentare all'Accademia un riassunto della mia relazione dell'eclisse, che sarà pubblicata poi *in extenso* nelle Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, insieme ad altre osservazioni fatte dal professore C. Chistoni.

*Osservazioni spettroscopiche visuali.* — Ho adoperato per queste uno spettroscopio a due prismi, applicato ad un equatoriale di apertura = 15 cm., lunghezza focale = 223 cm. Ho potuto osservare e disegnare in Alcalà le protuberanze solari al mattino dei giorni 24, 26, 27, 28, 30 agosto: da poche che erano, aumentarono di numero ed importanza al giorno dell'eclisse.

*Osservazioni visuali.* — Per queste mi sono servito di un piccolo equatoriale Steinheil avente: apertura = 8 cm., lunghezza focale = 124 cm., ingrandimento = 50, campo = 56'. Ho rivolta la mia attenzione solamente alle protuberanze; ho riveduto il gruppo orientale di 5 protuberanze che avevo osservato al mattino collo spettroscopio: la maggiore aveva sicuramente l'altezza di  $\frac{1}{6}$  del raggio lunare, ossia 165", mentre coll'osservazione spettroscopica avevo trovato solo 64", e circa altrettanto era stato trovato nelle analoghe osservazioni fatte prima e dopo dell'eclisse nell'Osservatorio di Catania dall'ing. A. Mascari e nell'Osservatorio di Roma (Coll. Rom.) dal dott. E. Tringali (fig. 1).

Si è dunque confermata la maggior grandezza delle protuberanze viste direttamente durante l'eclisse, in confronto alla immagine spettroscopica osservata fuori dell'eclisse. Ho poi notato che anche nell'osservazione diretta quella protuberanza appariva formata di lingue curve (come nell'osservazione spettroscopica) non di una massa unica di luce, come spesso si è asserito d'aver visto in eclissi precedenti.

Le protuberanze presentavano colorazioni varie e vivissime, che mi hanno molto impressionato: il corpo era di color purpureo chiaro, i lembi in basso



*Osservazioni spettroscopiche visuali.*

I. Catania: al pomeriggio; II. Roma: a mezzodì; III. Catania: al mattino; IV. Alcalà: al mattino.

*Osservazione spettroscopica fotografica.*

V. Alcalà: durante l'eclisse;  $C_{\alpha}$ . Protuberanza di Calcio.

FIG. 1.

di color violaceo saturo, in alto di color violetto chiaro, volgente al bianco lucidissimo, argenteo, alla cresta.

Ho poi cercato le protuberanze bianche, scoperte dal compianto P. Tacchini, ed ho visto sopra alla protuberanza maggiore come un pennacchio araldico a tre piume, molto ricurve, di color bianco-grigio, poco distinto dal fondo; questo pennacchio era alto circa  $\frac{1}{2}$  raggio lunare, cioè 8'.

Dopo ho diretto il cannocchiale e la mia attenzione all'orlo occidentale e vi ho trovata una bella protuberanza, piegata verso Nord, che non avevo visto nella osservazione spettroscopica del mattino e di cui non mi ero accorto, quando poco prima per stimare l'altezza della protuberanza maggiore orientale, avevo posto la luna nel centro del campo. Questa protuberanza era minore dell'orientale; sopra di essa vi era pure un debole pennacchio chiaro a due piume curve, alto circa  $\frac{1}{3}$  del raggio lunare, ossia 5'  $\frac{1}{2}$ .

Ho poi osservata una piccola protuberanza alquanto a sinistra del vertice apparentemente più alto, ossia a Sud.

Poscia ho visto nel quadrante NW un lungo arco cromosferico scoperto dalla luna, sul quale sorgevano parecchie fiammelle.

Tornato poi ad osservare la grande protuberanza orientale, l'ho vista contornata da una serie di archi concentrici bianco-grigi, evidentemente appartenenti alla corona solare: ciò mi ha fatto pensare che anche le alte appendici, o pennacchi, o protuberanze bianche, siano di natura coronale.

Le nubi hanno impedito di vedere la fine dell'eclisse totale e parziale.

*Fotografie spettrali dell'eclisse.* — Per fare queste ho adoperato una *prismatic camera*, risultante di un prisma obbiettivo di flint molto denso, coll'angolo rifrangente  $20^\circ$ , il diametro 11 cm.; di un obbiettivo fotografico col diametro 11 cm., la lunghezza focale 136 cm.; di una camera fotografica con *châssis* multiplo, cioè contenente 3 lastre sensibili  $9 \times 12$ , su cui si potevano fare 9 fotografie in tutto. Con numerose fotografie di spettri di stelle, fatte malgrado il cattivo tempo che ci ha continuamente tribolati, fino nella notte precedente l'eclisse, avevamo determinato esattamente la distanza focale e l'inclinazione da dare alla lastra per avere ben in fuoco tutta la parte visibile dello spettro. Questa *prismatic camera* è molto luminosa, ma ha poca dispersione; però è adatta allo studio o confronto che mi ero proposto di fare delle immagini monocromatiche delle protuberanze.

Mediante una specie di sella di legno e con due collari di ferro avevo collocato la *prismatic camera* sul mezzo del manicotto dell'asse di declinazione dell'equatoriale maggiore predetto, cosicchè poteva seguire gli astri nel loro moto diurno, mediante il motore dell'equatoriale medesimo, e poteva fissarsi a varie declinazioni mediante i due collari di ferro e viti di pressione. La congiunzione poi era tale che il piano di dispersione fosse parallelo alla linea del  $2^\circ$  e  $3^\circ$  contatto dell'eclisse e l'asse della camera deviasse rispetto quello del cannocchiale dell'angolo di  $15^\circ$  della deviazione minima del prisma, talchè i raggi incidenti si potevano rendere paralleli all'asse del cannocchiale.

Le fotografie durante l'eclisse sono state fatte puntualmente dal prof. dott. Mendola, colle pose stabilite: egli le ha pure sviluppate e ne ha fatti i diapositivi e gli ingrandimenti necessari per studiarle; egli mi ha pure aiutato in tutti i preparativi a Catania e ad Alcalà de Chivert.

Io ho dato il segnale del principio delle fotografie, quando col cannocchiale dell'equatoriale ho visto rompersi l'ultimo filetto del sole ed apparire le *perle di Baily*; e infatti la prima fotografia, istantanea, ha colto il momento del *flash*, ossia della apparizione dello *strato invertente*.

Le pose delle altre fotografie sono di secondi 1, 2, 8, 30, 60, 16, 4, istantanea l'ultima, che fu fatta a  $13^h 19^m 28^s$ .

Nella 1<sup>a</sup> fotografia (fig. 2), che è la più importante, si ha una moltitudine di righe od archi lucidi, generalmente corrispondenti alle righe fraunferiane: costituiscono il *flash*; poi si hanno archi più lunghi, ed in gran

parte più forti, che costituiscono lo spettro della cromosfera; su questi archi sorgono le immagini monocromatiche del gruppo delle protuberanze orientali; inoltre si hanno spettri lineari continui, appartenenti alla parte più bassa e più lucida della cromosfera o dello strato invertente, visibile fra le gole delle montagne lunari; si hanno pure analoghi spettri lineari, men continui, corrispondenti alla parte più lucida delle protuberanze; vi sono poi tratti sottili neri (bianchi nella figura negativa), estesi a tutta la lunghezza

Nord

Equatore Solare  
↓

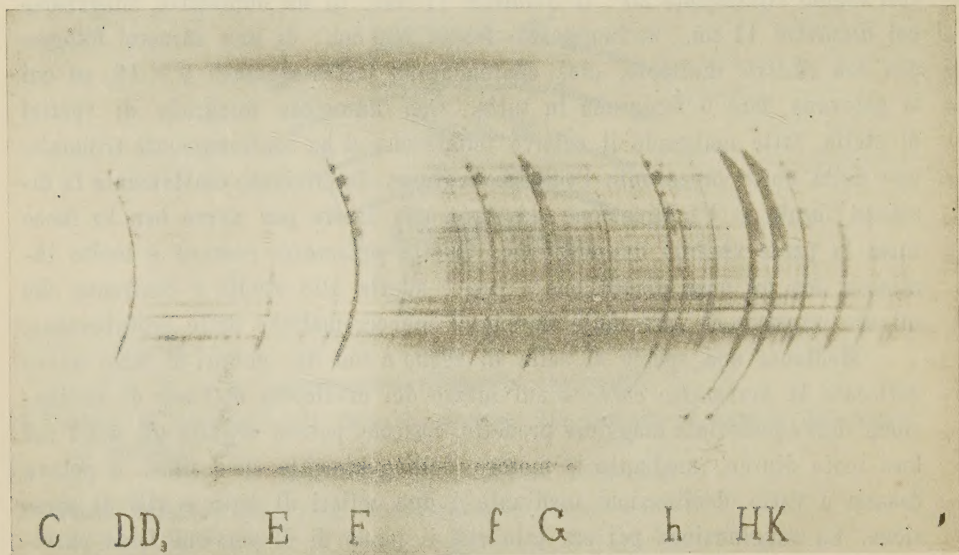


FIG. 2. — Fotografia spettrale 1<sup>a</sup>: *Flash* (Negativa).

dello spettro, i quali sono causati dalle montagne lunari, che occultano, interrompono, gli archetti del basso strato invertente, ma non interrompono, ed in generale solamente assottigliano gli archi dello strato cromosferico, che ha altezza maggiore. Finalmente si ha lo spettro della corona, del quale si tratterà dopo.

Nella 2<sup>a</sup> fotografia sono scomparsi gli archetti del *flash* e dominano gli archi cromosferici cogli spettri lineari continui (ma a tratti), corrispondenti alle parti più lucide delle protuberanze ed anche a porzioni più lucide della cromosfera.

Nella 3<sup>a</sup> fotografia gli archi cromosferici sono sensibilmente diminuiti di spessore, e cominciano ad essere discontinui; persistono gli spettri continui predetti.

Nella 4<sup>a</sup> fotografia gli archi cromosferici sono scomparsi, eccetto brevi tratti sulle righe *H* e *K*: persistono gli spettri continui suddetti.

Nella 5<sup>a</sup> fotografia non vi sono più che le protuberanze orientali ed i loro spettri continui; di più vi è ancora traccia di spettri continui corrispondenti alle parti più lucide della cromosfera, *già occultata dalla luna*.

Nella 6<sup>a</sup> fotografia, colla posa di un minuto, comprendente il mezzo della totalità, si hanno basse e parziali immagini delle protuberanze orientali soltanto, sulle righe *C, F, G, h, H e K*: vi sono ancora tracce di spettri continui, come sopra.

Nella 7<sup>a</sup> fotografia non vi è più che un resto minimo delle protuberanze orientali, quasi completamente coperte dalla luna, e cominciano a sco-

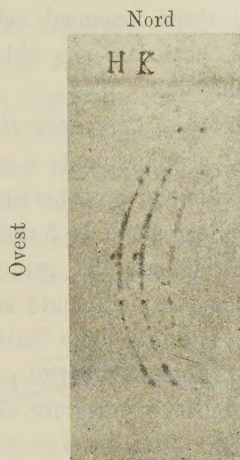


FIG. 3. — Fotografia spettrale 8<sup>a</sup> *Cromosfera* (Negativa).

pirsi piccole prominenze nella cromosfera ad Ovest, in due tratti: vi sono anche deboli spettri continui, corrispondenti ad esse prominenze.

Nella 8<sup>a</sup> fotografia sono del tutto scomparse le protuberanze orientali, e cresce l'arco cromosferico visibile ad Ovest con una protuberanza a NW, soltanto sulle righe *H e K* del Calcio, piccola, ma ben spiccata: vi sono gli spettri continui corrispondenti alle porzioni più lucide della cromosfera (fig. 3).

Nella 9<sup>a</sup> fotografia l'arco cromosferico è ancora più lungo e presenta parecchi tratti lucidi e prominenti, oltre la protuberanza predetta: vi sono ancora gli spettri continui, ma debolissimi.

Riassumendo, abbiamo all'istante dell'occultamento completo della fotosfera: 1°. Spettro continuo delle parti più basse della cromosfera, visibili nelle valli, tra le montagne lunari. 2°. Spettro continuo delle parti più lucide delle protuberanze (escluse quelle che hanno la loro immagine soltanto nelle righe *H e K* del Calcio). 3°. Spettro formato da una moltitudine di righe corte, lucide, appartenenti allo strato invertente, e costituenti il *flash*.

4°. Archi lunghi, forti, della cromosfera, e su di essi le immagini monocromatiche delle protuberanze. 5°. Striscie nere prodotte da occultamento dei bassi strati solari, causato dalle cime dei monti lunari. Occultata dopo pochi secondi anche la base della cromosfera, scompaiono i corrispondenti spettri continui, scompare lo spettro dello strato invertente, rimangono gli archi lunghi della cromosfera e le immagini delle protuberanze; poi restano solo le protuberanze; persistono sempre gli spettri continui delle parti più lucide di ciascuna delle 5 protuberanze idrogeniche, e diminuendo di intensità, questi spettri continui permangono fino al mezzo della totalità, quando non si hanno più che minimi resti di protuberanze ed alcune sono anche scomparse totalmente. Dopo ricominciano gli stessi fenomeni nel lato occidentale del sole, ma in ordine inverso; i quali, però, noi non abbiamo potuto osservare completamente in causa delle nubi.

*Confronto delle varie immagini monocromatiche delle protuberanze.* — Presentano notevoli differenze: primieramente si nota che sulle righe  $H$  e  $K$  del Calcio le immagini delle principali protuberanze orientali sono in maggior numero, più grandi e più estese, per modo da formare quasi una massa unica di luce: anzi all'estremità meridionale del gruppo vi è una protuberanza grande e complicata che manca completamente su tutte le altre righe. Ciò non dipende dalla sensibilità speciale delle lastre adoperate, perchè essa è massima nell'indaco, non nell'estremo violetto, ove sono  $H$  e  $K$ ; deve dunque dipendere dalla reale estensione maggiore ed intensità maggiore delle radiazioni dei vapori del Calcio.

Dopo le immagini delle protuberanze sulle righe  $H$  e  $K$ , vengono in ordine di intensità decrescente le immagini sulle righe  $F$ ,  $G$ , e poi pressochè eguali, quelle sulle righe  $h$ ,  $D_3$ ,  $C$ . Ciò per le fotografie su lastre pancromatiche; ma per l'occhio, ossia nell'osservazione visuale le intensità delle immagini monocromatiche delle protuberanze sono come quella delle loro righe lucide osservate ad occhio collo spettroscopio, cioè nel seguente ordine di intensità decrescente:  $D_3$ ,  $C$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $h$ ,  $H$  e  $K$ , trascurando le minori; e secondo la teoria della composizione dei colori, otteniamo i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} C + F &= \text{Rosso} + \text{Bleu-cianico} \dots\dots\dots = \text{Bianco roseo} \\ C \dots\dots\dots &= \text{Rosso} \\ D_3 + G &= \text{Giallo} + \text{Bleu-indigo} \dots\dots\dots = \text{Bianco} \\ D_3 + h + H + K &= \text{Giallo} + \text{Violetto} \dots\dots = \text{Bianco roseo} \end{aligned}$$

e sommando tutto avremo:

$$C + D_3 + F + G + h + K = \text{Bianco} + \text{Rosso} + \text{Roseo} = \text{Purpureo chiaro.}$$

Abbiamo computato due volte il rosso  $C$  ed il giallo  $D_3$ , ammettendo che la loro intensità sia circa doppia di quella degli altri colori con cui li

abbiamo combinati. Otteniamo così la colorazione purpurea chiara che è veramente la prevalente nelle protuberanze osservate visualmente nelle eclissi, e che perciò furono dette *rosee*.

Ma per la maggior altezza delle immagini *H* e *K* si comprende che la cresta delle protuberanze sarà di un violetto intensissimo e perciò volgente al bianco, come si sa avvenire per tutti i colori, secondo un noto fenomeno fisiologico, e come ha verificato sperimentalmente per il violetto il professor Hale (<sup>1</sup>).

Ai lati poi delle protuberanze, per la varia estensione delle immagini componenti, si potrà avere la prevalenza di colori diversi, come fu osservato da altri, e specialmente del violaceo, come fu da me notato. Nella fig. 4 sono sovrapposte le immagini della *D<sub>3</sub>* in nero e dalla *K* in bianco, ottenute decalcandole sopra un ingrandimento a 8 volte della 1<sup>a</sup> fotografia. E così è spiegato il dicroismo notevole delle protuberanze viste col cannocchiale, ed è spiegata ancora la maggiore grandezza che debbono avere le immagini delle protuberanze, formate di luce composta, quali sono quelle osservate direttamente o fotografate, in confronto alla immagine monocromatica nel rosso *C*, osservata collo spettroscopio visuale.

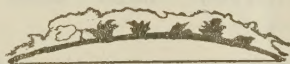


FIG. 4. — Protuberanze nel giallo (*D<sub>3</sub>*) e nel violetto (*K*).

Ma per spiegare le dimensioni tanto maggiori delle immagini delle protuberanze osservate visualmente in confronto alle spettroscopiche, bisogna tener conto pure della molta luce a spettro continuo che esse protuberanze emettono, come risulta dalle forti striscie di spettri continui che si hanno in coincidenza a tutte le protuberanze idrogeniche dei quali si è detto sopra, striscie visibili anche al di sopra delle loro cime; e della quale luce completa il sig. Deslandres ha dimostrata l'esistenza anche escludendo con schermi colorati la luce delle righe delle protuberanze (<sup>2</sup>).

*Protuberanze bianche.* — Nelle eclissi si osservano tre sorta di oggetti bianchi, prescindendo dalla corona: 1) Le creste bianche delle protuberanze rosee e della cromosfera, le quali sono visibili qualora si osservi con sufficiente ingrandimento. 2) Le protuberanze costituite da soli vapori di calcio le quali si ottengono colla fotografia, e se sono visibili direttamente (cosa non ancora ben dimostrata), debbono apparire come bianche o quasi bianche, per le ragioni dette sopra. 3) Le altissime protuberanze bianche, difficili

(<sup>1</sup>) Astrophysical Journal, May 1896, pag. 382.

(<sup>2</sup>) Comptes Rendus, tom. CXLI e CXLII.

da vedersi, scoperte da Tacchini, osservate anche da Maunder, Turner, Archer e da me. La mia impressione fu che questi oggetti, ancora problematici, abbiano piuttosto relazione colla corona anzichè colla cromosfera e colle protuberanze rosee. Anche il Tacchini accennò ad una possibile identità di questi oggetti coi pennacchi coronali (<sup>1</sup>). Per parte mia quest'opinione è confermata dal fatto che alla seconda osservazione della maggiore protuberanza orientale dell'eclisse in discorso, la vidi circondata da archi, evidentemente di natura coronale, come quelli affatto simili fotografati dalla Missione dell'Osservatorio di Washington per l'eclisse del 1901, e dagli osservatori ritenuti pure coronali ed in relazione alle protuberanze (<sup>2</sup>).

*Altezza dello strato invertente e della cromosfera.* — Si può ottenere per via geometrica, conoscendosi il diametro del sole (950",7) e quello della luna (996",6), ed avendo misurate le corde degli archi relativi, quali appaiono al momento del 2° o 3° contatto; la 1<sup>a</sup> fotografia ci ha dato:

| Righe lucide . . . . .         | Flash | D <sub>3</sub> | F     | G     | H e K | H <sub>ε</sub> |
|--------------------------------|-------|----------------|-------|-------|-------|----------------|
| Corde in mm. . . . .           | 4,45  | 7,14           | 7,83  | 8,97  | 9,49  | 6,60           |
| Archi in gradi e minuti elioc. | 19.46 | 32.51          | 36.31 | 42.58 | 46.9  | 30.6           |
| Alt. in secondi d'arco geoc.   | 2,8   | 7,6            | 9,4   | 12,8  | 14,7  | 6,5            |
| Alt. in Km. . . . .            | 1960  | 5320           | 6580  | 8960  | 10290 | 4550           |

L'altezza risultante per la cromosfera s'accorda abbastanza bene con quella che si ha dalle ordinarie osservazioni spettroscopiche: e quindi l'altezza dello strato invertente deve essere intorno a 3", o 2000 Km.

*Corona.* — Abbiamo ottenuta una sola e piccola fotografia utilizzabile della corona, con un obbiettivo Voigtländer di lunghezza focale 20 cm., apertura 4 cm.; sulla quale fotografia ho potuto misurare i principali pennacchi, mediante il macromicrometro, riducendone l'ingrandimento a  $1\frac{1}{2}$ ; ed ho ottenuto (fig. 5):

| Pennacchi . . . . .                      | A        | B     | C       | D        | E      | F      | G      |
|------------------------------------------|----------|-------|---------|----------|--------|--------|--------|
| Qualità . . . . .                        | mediocre | forte | forte   | mediocre | debole | debole | debole |
|                                          |          | lungo | diritto |          |        |        |        |
| Angolo di posizione<br>da Nord per Ovest | 1°       | 6°    | 147°    | 159°     | 189°   | 317°   | 328°   |
| Lunghezza in raggi<br>lunari . . . . .   | 2        | 3     | 4       | 3        | 3      | 2      | 2      |

(<sup>1</sup>) *Eclissi totali di sole del 1882-3-6-7*, pag. 58.

(<sup>2</sup>) Publications of the Naval Observatory, 2<sup>d</sup> Series, Vol. IV, App. I, pag. 239 L Tav. LVIII.

Inoltre vi è un pennacchio debole, molto curvo, ad ovest di *C*.

I pennacchi *A*, *B*, *C*, *D* non hanno direzione radiale; il prolungamento della loro direzione interseca il diametro  $180^{\circ}$ — $270^{\circ}$  per *A* e *D* ad Est dal centro, per *B* e *C* ad Ovest.

Non essendo riuscita, insieme alla corona, qualche stella, l'orientamento della lastra è solo grossolanamente approssimato; quindi gli angoli di posizione dati sopra potranno dover subire una sensibile correzione comune.

La parte più lucida della corona può ritenersi (come molti hanno già asserito) avere la forma a stella, caratteristica dell'epoca di massimo d'at-

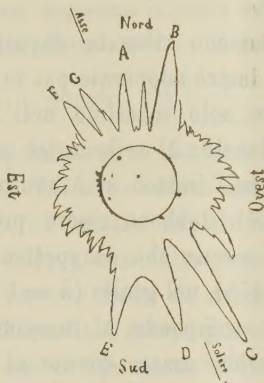


FIG. 5. — Corona solare.

tività del sole; ma vi è di più notevole, che mentre nelle epoche di minimo la corona presenta grandi espansioni equatoriali (come fu osservato nell'eclisse del 1900 ed in parecchie altre), in questa del 1905 si è avuta invece, come caratteristica, la presenza di lunghi pennacchi polari.

È opinione prevalente che i pennacchi della corona solare sieno costituiti da getti di particelle respinte dal sole, sia dalla pressione prodotta dalla luce (secondo Bartoli e Maxwell), sia da ripulsione elettrica. Nel 1875 io presentai a codesta R. Accademia alcune mie esperienze sulle traiettorie percorse dalle polveri elettrizzate. Non si può far a meno di vedere in parecchi dei casi da me descritti e rappresentati, l'analogia esistente tra le linee percorse dalle dette polveri ed i getti che si osservano nella corona.

Il diverso grado di attività e la diversa distribuzione della medesima sulla superficie solare produrrebbero delle corrispondenti differenze nel potenziale elettrico e quindi nella intensità e distribuzione dei pennacchi della corona.

*Immagini monocromatiche della corona.* — In tutte le fotografie fatte da noi colla *prismatic camera* vi sono parecchi anelli di luce diffusa aventi differente refrangibilità; nelle lastre ortocromatiche (sensibili anche al giallo)

ve ne sono due ben distinti: nel bleu e nel giallo; nelle lastre *sigma* di Lumière ve ne sono due: nel bleu e nel giallo, più debole; nelle lastre pancromatiche (sensibili anche al rosso) vi è inoltre un terzo anello distinto nel rosso, però più debole degli altri. Questi anelli hanno il diametro interno, nella direzione del piano di dispersione, minore dell'altro diametro, e corrispondentemente lo spessore nella prima direzione, maggiore che nella seconda.

I detti anelli non sono vere immagini monocromatiche della corona, corrispondenti alle radiazioni semplici del coronio ( $\lambda = 530,3$ ), dell'idrogeno, ecc., per le seguenti ragioni: 1) il contorno interno non è netto e circolare; 2) questo contorno non corrisponde per posizione nello spettro alle suddette radiazioni.

Questi anelli non si possono ritenere dovuti esclusivamente ai diversi massimi di sensibilità delle lastre adoperate per le seguenti ragioni: 1) nelle lastre *sigma* che hanno un solo massimo nell'indaco, si è ottenuto pure l'anello giallo, quantunque debole; 2) nelle lastre pancromatiche, che hanno un massimo nel giallo ed uno nell'indaco, si è avuto un anello anche nel rosso.

In conclusione tali anelli debbono essere prodotti da veri massimi di intensità nella luce della corona che dà spettro continuo: questi massimi sarebbero nell'indaco ( $\lambda = 475$ ), nel giallo ( $\lambda = 570$ ), nel rosso ( $\lambda = 650$ ). Il primo massimo veramente corrisponde al massimo principale di sensibilità delle lastre adoperate e potrebbe essere dovuto ad esso; i massimi nel giallo e nel rosso, che non corrispondono a massimi secondari della sensibilità della lastre, stanno a confermare i risultati delle osservazioni spettrali visuali e bolometriche anteriori, indicanti nella luce continua della corona abbondanza di raggi di grande lunghezza d'onda; ciò può dipendere dall'abbassarsi la temperatura delle particelle che costituiscono la corona medesima, nell'allontanarsi dalla superficie della fotosfera.

*Righe spettrali della corona.* — Non abbiamo ottenuto che la riga caratteristica del coronio a  $\lambda = 530,3$ ; ed anche assai debole e diffusa specialmente all'esterno del breve arco che la rappresenta nelle fotografie 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup>, 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup> della *prismatic camera*; questo arco è visibile solo nel lato occidentale del sole, quando la cromosfera vi era occultata dalla luna: apparisce nella lunula oscura compresa fra i due anelli lucidi, giallo e bleu, dei quali si è parlato prima.

Nello spettrografo (sulla cui fessura si era proiettata l'immagine reale dell'eclisse mediante un eliostato ed una lente convergente, acromatica) con 30<sup>s</sup> di esposizione, lo spettro della corona ai due lati E ed W dell'equatore solare è riuscito affatto continuo, senza righe, nè lucide, nè oscure.

La stazione della Missione italiana per l'osservazione dell'eclisse solare totale del 1905 fu impiantata ad Alcalà de Chivert, presso la costa orientale della Spagna. I mezzi furono accordati dal Ministro dell'istruzione del tempo, comm. prof. E. Orlando, al quale rendiamo pubbliche grazie.

Matematica. — *Su un lemma del Poincaré*. Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Nella Nota precedente <sup>(1)</sup> abbiamo stabilito il lemma, che il Poincaré, e dopo di lui, lo Steckloff, lo Zaremba ed altri posero a fondamento delle loro ricerche sul metodo di Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet, per tutti quei campi  $D$  che si possono spezzare in un numero finito  $h$  di campi  $D_i$ , convessi ciascuno rispetto ad un suo punto interno  $O_i$ , per modo che col crescere indefinito di  $h$  — e col diminuire indefinito delle dimensioni dei campi  $D_i$  — i numeri  $\frac{3l_i}{2L_i^3}, \frac{1}{13L_i^2}$  (dove  $l_i$  ed  $L_i$  rappresentano rispettivamente la distanza minima e massima di  $O_i$  dal contorno di  $D_i$ ) divengono grandi a piacere. Notiamo subito che non per ogni campo tale decomposizione sarà possibile: se, per es., il contorno del campo ha una cuspide di seconda specie colla punta volta verso l'esterno del campo, esso non si potrà spezzare in un numero finito di campi convessi ciascuno rispetto ad un suo punto interno. Tuttavia i campi per cui tale decomposizione può farsi sono assai generali: essi comprendono ad esempio, come ora mi propongo di mostrare, i campi cui fu applicato il lemma del Poincaré dagli autori citati, onde viene rimossa l'obbiezione fatta dal prof. Lauricella a queste ricerche. Le condizioni <sup>(2)</sup> cui tali campi soddisfano sono le seguenti:

1<sup>a</sup> in ogni punto del contorno esiste una tangente determinata;  
 2<sup>a</sup> l'angolo acuto  $O$  delle normali (o delle tangenti) in due punti  $P$  e  $P'$  del contorno è minore di  $ar$ , dove  $a$  è una costante, ed  $r$  è la distanza dei punti  $P$  e  $P'$ ;

3<sup>a</sup> esiste un numero  $d$  tale che, descritto un cerchio  $\gamma$  col centro in un punto arbitrario  $P$  del contorno e raggio  $d$ , ogni normale al contorno in un punto interno al cerchio incontra il contorno internamente al cerchio al più una volta.

<sup>(1)</sup> Questi Rendiconti, pag. 83.

<sup>(2)</sup> Cfr. ad es. Zaremba, *Sur l'intégration de l'équation  $\Delta u + \xi u = 0$* , Journal de Mathématiques. Ser. 5, tom. VIII, pag. 59. Lo studio è ivi condotto per i campi a tre dimensioni: per maggiore semplicità nella presente Nota come nella precedente ci siamo limitati a campi dello spazio a due dimensioni: però la cosa non importa differenze essenziali. Osserviamo di più che veramente la 3<sup>a</sup> condizione è alquanto mutata, in quanto che lo Zaremba chiede che, entro il cerchio di raggio  $d$ , ogni parallela alla normale in  $P$  incontri la curva in un solo punto: ma è ben chiaro che, quando ciò avvenga, sostituendo al più  $\frac{d}{2}$  a  $d$  è soddisfatta la condizione del testo, onde risulta che questa non è certamente più restrittiva di quella.

Si noti che, se la condizione 3<sup>a</sup> è soddisfatta per un valore di  $d$ , è soddisfatta per ogni valore minore di  $d$ .

Si deduce che per detti contorni si possono ritenere soddisfatte alcune altre condizioni:

4<sup>a</sup>. Siano  $S_1, S_2, S_3, \dots$  i punti in cui il cerchio  $\gamma$  di centro  $P$  e raggio  $d$  incontra il contorno:  $S_1 S_2$  il segmento del contorno interno al cerchio e contenente  $P$ . Siano  $P_1$  e  $P_2$  due punti di  $S_1 S_2$ : l'angolo della corda  $P_1 P_2$  colla tangente in un punto qualunque di  $S_1 S_2$  è  $< 2ad$ . Infatti esiste fra  $P_1$  e  $P_2$  almeno un punto  $P_3$  la cui tangente è parallela alla corda  $P_1 P_2$ :  $P_3$  si trova entro all'arco  $S_1 S_2$ , quindi entro al cerchio, e dista perciò da un punto qualunque  $Q$  di  $S_1 S_2$  meno di  $2d$ . La condizione 2<sup>a</sup> ci dice dunque che l'angolo della tangente in  $Q$  colla tangente in  $P_3$ , o (ciò che è lo stesso) colla corda  $P_1 P_2$  è  $< 2ad$ .

5<sup>a</sup>. Si deduce dalla 4<sup>a</sup> condizione: l'angolo della corda  $P_1 P_2$  e della normale in un punto dell'arco  $S_1 S_2$  è compreso fra  $\frac{\pi}{2} - 2ad$  e  $\frac{\pi}{2} + 2ad$ ; l'angolo di una tangente in un punto dell'arco  $S_1 S_2$  colla normale in un qualunque altro punto dell'arco stesso è compreso fra  $\frac{\pi}{2} - 2ad$  e  $\frac{\pi}{2} + 2ad$ .

6<sup>a</sup>. Col centro in  $P$  si descriva un cerchio  $\gamma_1$  di raggio  $\frac{d}{2}$ ; e sia  $P_1 P_2$  il tratto del contorno intorno a questo cerchio e contenente  $P$ . Le normali a  $P_1 P_2$  incontrino in  $M_1 M_2$  il cerchio  $\gamma$ : si può scegliere  $d$  abbastanza piccolo perchè l'area compresa fra l'arco  $P_1 P_2$ , le normali  $P_1 M_1$  e  $P_2 M_2$  e l'arco  $M_1 M_2$  di  $\gamma$  sia interna al campo.

Infatti le normali nei punti dell'arco  $P_1 P_2$  incontrano  $\gamma$  nei punti di un arco continuo  $\alpha$  di cui  $M_1$  ed  $M_2$  sono punti interni od estremi. Io dico che  $\alpha$  contiene il minore degli archi  $M_1 M_2$ . Ed invero preso un qualunque punto  $P_3$  dell'arco  $P_1 P_2$  esso dista da  $P_1$  di meno di  $d$ , e l'angolo delle normali in  $P_1$  e in  $P_3$  è per la condizione 2<sup>a</sup>  $< ad$ ; quindi il punto  $M_3$  in cui la normale in  $P_3$  incontra  $\gamma$  dista da  $M_1$  di un arco minore di  $\frac{\pi}{3} + 2ad$  (1). Se quindi  $d$  è piccolo per modo che  $\frac{\pi}{3} + 2ad < \pi$ , non potrà mai  $M_3$  coincidere col punto diametralmente opposto a  $M_1$  e quindi non potrà mai  $\alpha$  contenere completamente il massimo degli archi  $M_1 M_2$ . Ne segue che per ogni punto del minore degli archi  $M_1 M_2$  passa una normale al contorno in un punto dell'arco  $P_1 P_2$ ; per la condizione 3<sup>a</sup> segue che tale arco non ha nessun punto comune col contorno. Siccome ancora per la condizione 3<sup>a</sup> si ha lo stesso per le normali  $P_1 M_1, P_2 M_2$ , si deduce

(1) Cioè somma di un arco ( $< 2ad$ ) contenuto in un angolo  $< ad$  di vertice  $P_1$  e di un arco ( $\leq \frac{\pi}{3}$ ) avente corda  $\leq P_1 P_3 \leq d$ .

che l'area compresa fra l'arco  $P_1 P_2$ , le normali  $P_1 M_1$ ,  $P_2 M_2$  ed il cerchio  $\gamma$  è tutta interna al campo.

2. Prima di accingerci alla dimostrazione promessa facciamo due semplici osservazioni.

Anzitutto si noti che un campo limitato da segmenti di retta si può sempre spezzare nella somma di un numero finito di triangoli, e quindi di campi convessi.

In secondo luogo si consideri un campo convesso il cui contorno sia formato di una parte  $C_1$  tale, che su ogni retta per un punto  $P$  di  $C_1$  gli eventuali punti interni siano tutti da una parte di  $P$ , e di una parte  $C_2$  qualunque purchè avente in ogni punto tangente determinata e priva di cuspidi. Il campo è convesso rispetto a tutti quei punti, se esistono, per cui non passa nessuna tangente a  $C_2$ . Infatti sia  $O$  un punto rispetto a cui il campo non è convesso: esisterà un raggio  $s$  per  $O$  che incontra il contorno in più di un punto e quindi almeno in tre punti: supponiamo che  $s$  incontri ordinatamente a partire da  $O$  il contorno nei punti  $A_1 A_2 A_3 \dots$ . Il tratto  $A_1 A_2$  sarà esterno al campo, i tratti  $OA_1$ ,  $A_2 A_3$  interni.  $A_1$ ,  $A_2$  sono su  $C_2$ , poichè sia per  $A_1$  che per  $A_2$  passa la retta  $OA_1 A_2$  su cui esistono punti interni al campo sia da una parte che dall'altra di  $A_1$  ed  $A_2$ . Spostiamo  $s$  attorno ad  $O$  con continuità: in una conveniente posizione di  $s$ ,  $A_1$  ed  $A_2$  coincidono: altrimenti la regione luogo dei punti di  $A_2 A_3$  sarebbe staccata dalla regione luogo dei punti di  $OA_1$  e quindi il campo non sarebbe connesso. Siccome  $A_1$  ed  $A_2$  sono sempre su  $C_2$ , e  $C_2$  ha in ogni punto una tangente determinata, in tale posizione  $s$  tocca  $C_2$ . Quindi è dimostrato l'assunto.

3. Si consideri un campo soddisfacente le condizioni del n. 1, e servando le notazioni del n. 1 condizione 6<sup>a</sup>, si costruisca il quadrangolo  $M_1 P_1 P_2 M_2$  che ha i lati  $M_1 P_1$ ,  $P_2 M_2$ ,  $M_1 M_2$  rettilinei e come lato  $P_1 P_2$  l'arco  $P_1 P_2$  del contorno. Supponiamo  $d$  piccolo per modo che  $\cos ad > 0,9$ ,  $\sin ad < 0,2$ ,  $\operatorname{tg} ad < 0,2$ : basterà perciò che sia  $ad < \frac{\pi}{30}$ . Al quadrangolo

$P_1 M_1 M_2 P_2$  si può applicare la seconda osservazione del n. 2, considerando come parte  $C_1$  l'insieme dei tre lati rettilinei, come parte  $C_2$  l'arco  $P_1 P_2$ : per riconoscere la possibilità di ciò, basterà osservare che il quadrangolo sta tutto da una parte di ognuno dei suoi lati rettilinei. Infatti il lato  $P_1 P_2$  sta tutto da una parte di  $M_1 P_1$  e di  $P_2 M_2$  in virtù della condizione 3<sup>a</sup> unita coll'osservazione che  $P_1 P_2$  è tutto intorno al cerchio  $\gamma_1$  di centro  $P$  e raggio  $\frac{d}{2}$ . Dal ragionamento usato nel dimostrare che è soddisfatta la condizione 6<sup>a</sup> segue inoltre che il segmento  $M_1 M_2$  sottende del cerchio  $\gamma$  un arco  $< \frac{\pi}{3} + 2ad < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{15} < \frac{2\pi}{3}$ ; quindi  $M_1 M_2$  dista da  $P$  più di  $\frac{d}{2}$ . Esso

è dunque tutto fuori del cerchio  $\gamma_1$  e quindi non ha punti comuni coll'arco  $P_1 P_2$ . Concludiamo che  $P_1 P_2$  sta tutto da una parte di ciascuno dei lati rettilinei del quadrangolo. Basta quindi dimostrare che i lati  $P_1 M_1$  e  $P_2 M_2$  non si tagliano mutuamente e che gli angoli  $P_1 M_1 M_2$  e  $P_2 M_2 M_1$  del quadrangolo non sono  $> \pi$ . Quest'ultimo fatto risulta immediatamente dall'osservazione che questi angoli sono angoli di due corde del cerchio  $\gamma$ . Quanto all'altro esso sarà evidente quando si mostri che il punto A in cui le rette  $P_1 M_1$  e  $P_2 M_2$  si incontrano è fuori di  $\gamma$ . Infatti si conducano da P le normali  $PT_1$  e  $PT_2$  alle rette  $P_1 M_1$ ,  $P_2 M_2$ : sarà  $PT_1 = PP_1 \sin PP_1 T_1$ , ma  $PP_1 = \frac{d}{2}$ ,  $PP_1 T_1$  è, per la condizione 5<sup>a</sup>, compresa fra  $\frac{\pi}{2} + ad$  e  $\frac{\pi}{2} - ad$  quindi  $\sin PP_1 T_1 > \cos ad > 0,9$  e  $PT_1 > \frac{9}{20} d$ . Analogamente  $PT_2 > \frac{9}{20} d$ . Ora il punto A è fuori o dentro al cerchio  $\gamma$  a seconda che  $\frac{PT_1}{d}$  è maggiore o minore di  $\sin PAT_1$ ; ma  $\sin PAT_1 < \sin P_2 A P_1 < \sin ad < \frac{1}{5} < \frac{9}{20} < \frac{PT_1}{d}$  quindi A è fuori di  $\gamma$ . Risulta quindi, come si era detto, che il quadrangolo  $P_1 M_1 M_2 P_2$  sta tutto da una parte di ciascuno dei suoi tre lati rettilinei. E dalla precedente discussione risulta inoltre che esso è connesso, e per la condizione 6<sup>a</sup> del n. 1 tutto interno al campo.

4. Prendiamo ora sulla normale in P al contorno un punto O interno al campo tale che  $PO = \frac{1}{4} d$ . È facile vedere che  $P_1 M_1 M_2 P_2$  è convesso rispetto ad O. Per la seconda osservazione del numero 2, basta mostrare che nessuna tangente a  $P_1 P_2$  passa per O. Ora, preso un punto E di  $P_1 P_2$  la tangente in esso incontri la normale in P in F, dal triangolo PFE si deduce  $PF = PE \frac{\sin PEF}{\sin EFP}$ . Ma  $PE < \frac{d}{2}$ , e, per la condizione 4<sup>a</sup>  $PEF < ad$ ,  $\sin PEF < \sin ad < 0,2$ ; EFP è l'angolo della normale in P e della tangente in E quindi è compreso (condizione 5<sup>a</sup>) fra  $\frac{\pi}{2} - ad$  e  $\frac{\pi}{2} + ad$  perciò  $\sin EFP > \sin \left( \frac{\pi}{2} - ad \right) = \cos ad > 0,9$ . Sarà dunque  $PF < \frac{2d}{9 \cdot 2} = \frac{1}{9} d$ .  $PO = \frac{1}{4} d$  è quindi sempre maggiore di PF e cioè per O non passa nessuna tangente a  $P_1 P_2$ .

5. Troviamo ora dei limiti inferiori per i numeri  $\frac{3l}{2L^3}$ ,  $\frac{1}{13L^2}$  per il campo interno al quadrangolo  $P_1 M_1 M_2 P_2$ . Anzitutto poichè  $P_1 M_1 M_2 P_2$  è tutto contenuto nel cerchio di centro P e raggio  $d$  sarà

$$L < 2d.$$

Per avere un limite inferiore della minima distanza  $l$  di  $O$  dal contorno di  $P_1 M_1 M_2 P_2$ , basta calcolare le distanze  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  di  $O$  rispettivamente dai lati  $P_1 P_2, P_1 M_1, P_2 M_2, M_1 M_2$ . La distanza  $\delta_1$  di  $O$  dai punti  $E$  di  $P_1 P_2$  è maggiore della distanza di  $O$  dalle tangenti all'arco  $P_1 P_2$  nei punti stessi, quindi  $\delta_1 > OF$  sen  $OFE$ . Ma  $OFE$  è compreso fra  $\frac{\pi}{2} + ad$  e  $\frac{\pi}{2} - ad$  quindi sen  $OFE > 0,9$ ; di più  $OF = OP - PF > \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) d = \frac{5}{36} d$ ; quindi

$$\delta_1 > \frac{5}{36} \frac{9}{10} d = \frac{1}{8} d.$$

Se diciamo  $e_2, e_3, e_4$  le distanze di  $P$  dai lati  $P_1 M_1, P_2 M_2, M_1 M_2$ , sarà evidentemente  $\delta_i > e_i - PO = e_i - \frac{1}{4} d$ : ci basterà quindi calcolare  $e_2 e_3 e_4$ . Sarà (n. 3)  $e_2 = PT_1 > \frac{9}{20} d$ . Si deduce

$$\delta_2 > \left(\frac{9}{20} - \frac{1}{4}\right) d = \frac{1}{5} d.$$

Analogamente calcolando la lunghezza  $e_3$  della normale  $PT_2$  condotta da  $P$  su  $P_2 M_2$ , si ha

$$\delta_3 > \frac{1}{5} d.$$

Rispetto ad  $e_4$  si è già ottenuto al n. 3  $e_4 > \frac{d}{2}$ : si ha quindi

$$\delta_4 > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) d > \frac{1}{4} d.$$

Confrontando i valori di  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  si ottiene  $l > \frac{1}{8} d$ . Il minore dei due numeri  $\frac{3l}{2L^3}$  e  $\frac{1}{13L^2}$  è quindi maggiore di  $\frac{1}{52d^2}$ .

Possiamo quindi concludere che il campo  $P_1 M_1 M_2 P_2$  soddisfa alle condizioni imposte ai campi parziali  $D_i$  in cui si deve dividere il campo  $D$  per applicarvi il teorema del Poincaré, in quanto che esso è convesso rispetto ad un suo punto interno, ed i numeri  $\frac{3l}{2L^3}$  e  $\frac{1}{13L^2}$  crescono indefinitamente al diminuire delle dimensioni del campo.

Ora è ben chiaro che preso un campo soddisfacente alle condizioni del n. 1, si può procedere alla costruzione di simili quadrangoli per modo che ogni parte del contorno appartenga ad uno e ad uno solo di essi come lato curvilineo  $P_1 P_2$ . Siccome il contorno ha lunghezza finita e la lunghezza di ciascuno di questi archi  $P_1 P_2$  è sempre  $> d$ , otterremo un numero finito di

quadrangoli i quali mai ricopriranno due volte un pezzo del campo. Talchè il campo risulterà composto di due parti: l'una è la somma di detti quadrangoli e l'altra consta di un poligono a lati rettilinei (limitato dai segmenti analoghi ad  $M_1 M_2$ ): l'una e l'altra di queste parti si possono spezzare in parti soddisfacenti alle condizioni imposte ai campi parziali  $D_i$ ; la prima per quanto è detto in questo numero, la seconda per la prima osservazione del n. 2. Il campo totale risulterà quindi diviso nel modo richiesto.

Impiccolendo  $d$  — e con ciò aumentando il numero dei campi quadrangolari parziali — e suddividendo, ove occorra, i triangoli in cui si divide il campo poligonale, si potrà fare in modo che i numeri  $\frac{3l}{2L^3}$  e  $\frac{1}{13L^2}$  per questi campi crescano ad arbitrio.

Risulta quindi che per i campi soddisfacenti alle condizioni del n. 1 si può, come si è detto, applicare il teorema del Poincaré.

Però non sarebbe difficile vedere che non impedirebbe la decomposizione in campi parziali che godano delle proprietà accennate nel n. 1, l'esistenza di un numero finito di punti angolari o di cuspidi di prima specie od anche di cuspidi di seconda specie purchè colla punta volta verso l'interno del campo: e che anche a questi campi più generali si può, ove occorra, applicare il lemma del Poincaré.

**Matematica.** — *Ancora alcune osservazioni sulle funzioni derivate.* Nota di BEPPO LEVI, presentata dal Socio C. SEGRE.

1. In tre Note precedenti, pubblicate in questi Rendiconti (<sup>1</sup>), col titolo: *Ricerche sulle funzioni derivate*, ho approfondito assai più che non fosse stato fatto fin qui lo studio delle dipendenze fra le funzioni continue e le loro funzioni derivate — massimamente per il caso in cui taluna di queste funzioni derivate possa assumere valori infiniti od illimitatamente grandi. Ed uno dei principali risultati dell'ultima delle Note citate (<sup>2</sup>) si può riassumere brevemente nell'enunciato:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè, nei riguardi di una funzione  $f(x)$  continua in un dato intervallo  $a \dots b$  e di una qualunque delle sue funzioni derivate  $u(x)$ , valga il teorema fondamentale del calcolo integrale è che l'aggregato dei valori della  $f(x)$  in un qualunque aggregato di punti di misura nulla abbia misura nulla, abbia inoltre misura nulla l'aggregato dei punti in cui qualcuna delle sue funzioni derivate diviene infinita, ed esista inoltre l'integrale nell'intervallo  $a \dots b$  della funzione derivata.*

(<sup>1</sup>) Vol. XV, 1° semestre 1906, pp. 433, 551, 674.

(<sup>2</sup>) N. 2, pag. 679.

L'integrale s'intende qui nel senso del Lebesgue <sup>(1)</sup>.

Nei numeri seguenti di quella Nota si son dedotti notevoli corollari di questa proposizione: ma fin d'allora si è pure annunziato che, nei casi particolari considerati, si poteva rendere assai più esplicita la proposizione in discorso.

Sopra tali osservazioni intendo ritornare in questa Nota.

2. Alla proposizione del n. 3 della Nota citata (pag. 680) si può sostituire quest'altra:

*Se una  $u(x)$  delle funzioni derivate della funzione continua  $f(x)$  è finita in tutto l'intervallo  $a \dots b$ , o, più generalmente,  
se l'aggregato dei punti in cui  $u(x)$  è infinita e riducibile,  
la condizione necessaria e sufficiente perchè esistano gli integrali*

$$\int_a^b u(x) dx \quad , \quad \int_a^b |u(x)| dx$$

*è che la funzione abbia in  $a \dots b$  variazione limitata. La funzione  $f(x)$  differisce allora al più per una costante dall'integrale indefinito (del Lebesgue) della detta derivata <sup>(2)</sup>.*

A facilitare l'intelligenza della dimostrazione che segue, occorre richiamare le proprietà fondamentali dell'integrale d'una funzione non limitata. Mediante i numeri  $l_i (i = -\infty, \dots, +\infty, \lim_{i \rightarrow +\infty} l_i = +\infty, \lim_{i \rightarrow -\infty} l_i = -\infty, l_{i+1} - l_i = \varepsilon)$  si divida l'intervallo di variabilità della  $u(x)$  in intervalli parziali di ampiezza  $\varepsilon$ , e si chiami  $e_i$  l'aggregato degli  $x$  di  $a \dots b$  per cui  $l_{i+1} > u(x) \geq l_i$ . Si ponga

$$S_\varepsilon = \sum_{-\infty}^{+\infty} l_i m(e_i) \quad (3);$$

sarà, per definizione <sup>(4)</sup>,

$$\int_a^b u(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon.$$

Se la  $S_\varepsilon$  non è convergente, l'integrale non esiste: gli integrali di  $u(x)$  e di  $|u(x)|$  esistono e non esistono simultaneamente. Osservando che

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} l_i m(e_i) = \lim_{\substack{n_1 \rightarrow +\infty \\ n_2 \rightarrow -\infty}} \sum_{n_1}^{n_2} l_i m(e_i),$$

(1) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration etc.*, Paris, Gauthier-Villars, 1904, pag. 112 e seg.; *Intégrale, longueur, aire*, Ann. di mat. (3) 7 (Thèse).

(2) La proposizione in questa forma fu già enunciata dal Lebesgue (*Leçons*, pp. 122-123) Cfr. al riguardo la mia prima Nota sopra citata (1° sem., pag. 434) e la Nota del Lebesgue, *Sur les fonctions dérivées* (Questi Rendiconti, vol. XV, 2° sem., pag. 1) e i numeri 8 e 9 della presente Nota.

(3)  $m(e_i)$  rappresentando la misura dell'aggregato  $e_i$ . Cfr. per questi ed altri simboli la mia prima Nota sopra citata e le *Leçons* del Lebesgue.

(4) Lebesgue, *Leçons*, pag. 115.

si può dare alla precedente definizione la forma, che ci sarà più utile in seguito <sup>(1)</sup>,

$$\int_a^b u(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ n_1=+\infty, n_2=-\infty}} S'_{\varepsilon n_1 n_2}, \quad S'_{\varepsilon n_1 n_2} = \sum_{n_2}^{n_1} l_i m(e_i);$$

e se, come nella presente applicazione, l'aggregato dei punti in cui  $|u(x)| = \infty$  ha misura nulla, si può ancora dire che

$$\int_a^b u(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ \lambda=\infty}} S''_{\varepsilon \lambda}, \quad S''_{\varepsilon \lambda} = \sum_{(\lambda)} l_i m(e_i)$$

dove  $\sum_{(\lambda)}$  rappresenta la somma che si ottiene sostituendo nella  $\sum_i$  rispettivamente  $+\lambda m(e_i)$  e  $-\lambda m(e_i)$  ai termini per cui  $l_i > \lambda$  ovvero  $l_i < -\lambda$ .

3. Supporremo dapprima, per semplicità, che la funzione  $u(x)$  sia ovunque finita nell'intervallo  $a \dots b$ ; e, per fissare le idee, supporremo che la  $u(x)$  sia precisamente la derivata superiore a destra.

Fissata la successione di numeri  $l_i$  ed un valore arbitrario di  $\lambda$ , si determini una serie di numeri positivi  $\eta_i$  tali che

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |l_i| \eta_i \leq \varepsilon, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \eta_i \leq \varepsilon^2 \frac{1}{\lambda^2}$$

e si racchiuda ciascun aggregato  $e_i$  in un aggregato di segmenti  $A_i$  tale che

$$0 < m(A_i) - m(e_i) = \eta_i.$$

L'aggregato  $A_i$  essendo numerabile, si chiami  $A_{ip}$  uno qualunque dei segmenti che lo compongono (quello che occupa il posto  $p$  nella supposta numerazione).

Ogni punto  $x$  di  $a \dots b$  appartenendo allora ad un determinato aggregato  $e_i$  e a un determinato segmento  $A_{ip}$  <sup>(2)</sup>, si consideri il segmento  $x \dots x + h$  massimo di lunghezza  $\leq \varepsilon$  e tale che anche  $x + h$  appartenga ad  $A_{ip}$  e che

$$l_i - \varepsilon \leq r[f(x), x, x + h] \leq l_i + \varepsilon$$

e si immagini ricoperto l'intervallo  $a \dots b$  mediante una successione di questi segmenti  $x \dots x + h$  tale che il primo estremo del primo segmento sia  $a$ , e di ciascuno degli altri segmenti sia primo estremo il secondo estremo del segmento che immediatamente lo precede (se tale immediatamente precedente

<sup>(1)</sup> Cfr. pure la mia Nota: *Sopra l'integrazione delle serie* (Rend. del R. Ist. Lomb di sc. e lett. (2) 39, 1906, pag. 776).

<sup>(2)</sup> Ogni punto  $x$  può appartenere a più segmenti  $A_{ip}$ , corrispondenti a valori differenti di  $i$ ; ma esso appartiene ad un solo aggregato  $e_i$ , e, per dato  $i$ , ad un solo segmento  $A_{ip}$ .

esiste) ovvero il limite dei secondi estremi dei segmenti che lo precedono <sup>(1)</sup>. Chiameremo *segmenti*  $H$  i segmenti  $x \dots x + h$  che compongono questa successione; l'aggregato dei loro estremi è chiuso e numerabile, quindi riducibile; chiameremo  $\mathcal{A}$  l'aggregato dei suoi punti di condensazione.

L'aggregato  $\mathcal{A}$  può racchiudersi in un aggregato *finito* di segmenti, di misura totale piccola a piacere, operando come segue:

Sia  $C_1$  il punto di  $\mathcal{A}$  più prossimo a  $b$  ( $b$  medesimo, se questo appartenesse ad  $\mathcal{A}$ ): si determini a sinistra di  $C_1$  un segmento  $c_1 \dots C_1$  (p. es. il massimo) di lunghezza  $\leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$  ed in cui l'oscillazione di  $f(x)$  sia  $\leq \theta$  ( $\theta$  essendo un numero positivo arbitrario, di cui si potrà disporre ulteriormente) e tale che  $c_1$  sia estremo di un segmento  $H$ . Sia poi  $C_2$  il punto di  $\mathcal{A}$  più prossimo a  $c_1$ , a sinistra di  $c_1$  (eventualmente  $c_1$  medesimo, se appartenesse ad  $\mathcal{A}$ ), e si determini, a sinistra di  $C_2$  un segmento  $c_2 \dots C_2$  di lunghezza  $\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda}$  ed in cui l'oscillazione di  $f(x)$  sia  $\leq \frac{\theta}{2}$  e tale che  $c_2$  sia estremo di un segmento  $H$ . Sia ancora  $C_3$  il punto di  $\mathcal{A}$  più prossimo a  $c_2$ , a sinistra di  $c_2$ ; su esso si operi in modo analogo sostituendo ai numeri  $\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{2\lambda}; \theta, \frac{\theta}{2}$  i numeri  $\frac{\varepsilon}{4\lambda}, \frac{\theta}{4}$  e così si prosegua.

Il procedimento terminerà, dopo un numero finito di operazioni, colla determinazione d'un punto  $c_n$ , estremo di un segmento  $H$ , e precedente, nell'ordine  $a \dots b$  tutti i punti di  $\mathcal{A}$ . Per persuadersene basta osservare che agli estremi dei segmenti  $H$  e loro punti di condensazione, o, se si vuole, anche soltanto ai punti di  $\mathcal{A}$ , si possono far corrispondere *ordinatamente* i numeri di un conveniente segmento della classe  $Z(\aleph)$  del Cantor, in modo che tali numeri crescano colla distanza del punto corrispondente da  $a$ . I numeri così affissi ai punti  $C_1 C_2 \dots$  costituiscono quindi una successione decrescente e perciò finita <sup>(2)</sup>.

Esteriormente agli intervalli  $c_i \dots C_i$  non esistono punti di condensazione degli estremi dei segmenti  $H$ ; quindi esiste solo un numero finito di tali segmenti; li chiameremo i *segmenti*  $H'$ ; essi, coi segmenti  $c_i \dots C_i$  medesimi costituiscono una catena (*di un numero finito di elementi*) ricoprente l'intervallo  $a \dots b$ .

Indicheremo con  $\sum'$  le somme estese a soli termini corrispondenti a segmenti  $H'$ .

(1) Cfr. la mia prima Nota sopra citata, pag. 435 e Lebesgue, *Leçons*, pag. 163, come pure la Nota citata, questi Rendiconti, pag. 6.

(2) Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (2<sup>ter</sup> Artikel), Math. Ann. 49, pag. 207; Encyklopädie, Art. Mengenlehre IA 5, n. 6.

4. Supposto che la funzione  $f(x)$  abbia in  $a \dots b$  variazione totale limitata, si indichi con  $V$  tal variazione; sarà, per definizione,

$$(1) \quad V > \sum_i' |l_i| h - (b - a) \varepsilon > \sum_{(\lambda)}' |l_i| h - (b - a) \varepsilon \quad (1).$$

D'altra parte, poichè la somma delle lunghezze dei segmenti  $c_i \dots C_i$  che coi segmenti  $H'$  completano  $a \dots b$  è

$$< \frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2\lambda} + \frac{\varepsilon}{4\lambda} + \dots = 2 \frac{\varepsilon}{\lambda},$$

$$(2) \quad \sum_{(\lambda)}' |l_i| h \geq \sum_{(\lambda)} |l_i| h - \lambda \cdot 2 \frac{\varepsilon}{\lambda} = \sum_{(\lambda)} |l_i| h - 2\varepsilon.$$

Si chiami ancora  $B_i$  l'aggregato dei segmenti  $H$  il cui primo estremo appartiene ad  $e_i$ ; si ha (2)

$$(3) \quad \sum_{(\lambda)} |l_i| h = \sum_i |l_i| m(B_i)$$

$$0 \leq m(A_i) - m(B_i) < \sum [m(A_i) - m(B_i)] = \sum m(A_i) - \sum m(B_i)$$

$$\sum m(B_i) = b - a = \sum m(e_i)$$

e quindi

$$m(A_i) - m(B_i) < \sum [m(A_i) - m(e_i)] = \sum \eta_i \leq \varepsilon^2 \frac{1}{\lambda^2}$$

onde

$$(4) \quad 0 \leq \sum_{(\lambda)} |l_i| m(A_i) - \sum_{(\lambda)} |l_i| m(B_i) <$$

$$< \sum_{(\lambda)} |l_i| [m(A_i) - m(B_i)] < \varepsilon^2 \frac{1}{\lambda^2} \sum_{(\lambda)} |l_i| = \varepsilon \quad (3).$$

Se in fine si tien presente che

$$\sum_{(\lambda)} |l_i| m(e_i) \leq \sum_{(\lambda)} |l_i| m(A_i)$$

si ha dalle (4), (3), (2), (1)

$$\sum_{(\lambda)} |l_i| m(e_i) < \sum_{(\lambda)} |l_i| m(B_i) + \varepsilon \leq \sum_{(\lambda)}' |l_i| h + 3\varepsilon < V + (b - a + 3) \varepsilon.$$

(1) Qui e nei casi analoghi le somme si intendono estese a tutti i segmenti  $x \dots x + h$  che costituiscono l'aggregato  $H'$  (o l'aggregato  $H$  ove manchi l'apice alla  $\Sigma$ ) ed il fattore  $h$  è, di conseguenza, l'ampiezza del segmento cui il termine si riferisce, mentre  $i$  è l'indice dell'aggregato  $e_i$  cui appartiene il suo primo estremo  $x$ .

(2) Cfr. la mia prima Nota citata, 1° sem., pag. 436.

(3) Per giustificare questo passaggio occorre tener presente che si è supposto  $l_{i+1} - l_i = \varepsilon$ . Lo stesso deve dirsi pel passaggio analogo della prima Nota citata, ove, quantunque si sia detto solo che  $l_{n+1} - l_n \leq \varepsilon$ , ci si è valse implicitamente della possibilità di fissare tal differenza precisamente  $= \varepsilon$ .

Si faccia ora tendere  $\varepsilon$  a 0 e  $\lambda$  ad  $\infty$  e si tengano presenti le osservazioni preliminari del n. 2: si concluderà che *se la funzione  $f(x)$  ha variazione totale  $V$ , limitata, la funzione  $u(x)$  è integrabile e*

$$(5) \quad \int_a^b |u(x)| dx \leq V.$$

5. La somma dei valori assoluti degli incrementi di  $f(x)$  negli intervalli  $c_i \dots C_i$  è

$$< \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{4} + \dots = 2\theta;$$

si ha quindi

$$(6) \quad \sum'_i l_i h - (b-a)\varepsilon - 2\theta < f(b) - f(a) < \sum'_i l_i h + (b-a)\varepsilon + 2\theta.$$

Si può inoltre supporre scelto  $\varepsilon$  abbastanza piccolo perchè la somma dei valori assoluti degli incrementi di  $f(x)$  in ogni catena di segmenti di lunghezza  $\leq \varepsilon$  differisca dalla variazione totale  $V$  di  $f(x)$  per meno di  $\theta$ , ovvero, qualora  $f(x)$  sia a variazione illimitata, superi un numero positivo  $N$  arbitrariamente assegnato. Si ha allora

$$(7) \quad V - \theta < \sum'_i |l_i| h + (b-a)\varepsilon + 2\theta \quad \text{se } f(x) \text{ ha variazione totale } V$$

$$(7') \quad N < \sum'_i |l_i| h + (b-a)\varepsilon + 2\theta \quad \text{se } f(x) \text{ ha variazione totale illimitata.}$$

Si chiamino  $n_1$  e  $n_2$  i due valori estremi di  $i$  cui corrispondono termini delle  $\sum'$ : si ha

$$\sum_{n_1}^{n_2} |l_i| m(e_i) \geq \sum_{n_1}^{n_2} |l_i| m(A_i) - \sum_{n_1}^{n_2} |l_i| \eta_i > \sum_{n_1}^{n_2} |l_i| m(A_i) - \varepsilon$$

$$\sum_{n_1}^{n_2} |l_i| m(A_i) \geq \sum_{n_1}^{n_2} |l_i| h \geq \sum' |l_i| h.$$

Da queste disuguaglianze e dalle (7) e (7') risulta rispettivamente nei due casi

$$(8) \quad \sum_{n_1}^{n_2} |l_i| m(e_i) > V - 3\theta - (b-a+1)\varepsilon$$

$$(8') \quad \sum_{n_1}^{n_2} |l_i| m(e_i) > N - 2\theta - (b-a+1)\varepsilon.$$

Facendo tendere  $\varepsilon$  e  $\theta$  a 0, si conclude (n. 2) che *se  $f(x)$  è a variazione illimitata le funzioni  $|u(x)|$  e  $u(x)$  non sono integrabili, se invece  $f(x)$  ha variazione totale  $V$ , la (8) colla (5) dà precisamente*

$$(9) \quad \int_a^b |u(x)| dx = V.$$

6. Si ha pure

$$\begin{aligned} \left| \sum_{(\lambda)} l_i m(e_i) - \sum_{(\lambda)} l_i m(A_i) \right| &= \left| \sum_{(\lambda)} l_i \eta_i \right| \leq \sum_{(\lambda)} |l_i| \eta_i \leq \varepsilon \\ \left| \sum_{(\lambda)} l_i m(A_i) - \sum_{(\lambda)} l_i h \right| &= \left| \sum_{(\lambda)} l_i [m(A_i) - m(B_i)] \right| \leq \\ &\leq \sum_{(\lambda)} |l_i| m(A_i) - \sum_{(\lambda)} |l_i| m(B_i) \\ \left| \sum' l_i h - \sum_{(\lambda)} l_i h \right| &< \sum'_{|l_i| > \lambda} (|l_i| - \lambda) h < \sum_{|l_i| > \lambda} (|l_i| - \lambda) h \leq \sum_{|l_i| > \lambda} (|l_i| - \lambda) m(A_i) = \\ &= \sum |l_i| m(A_i) - \sum_{(\lambda)} |l_i| m(A_i) \leq \sum |l_i| m(e_i) - \sum_{(\lambda)} |l_i| m(e_i) + \sum |l_i| \eta_i; \end{aligned}$$

ed a causa della integrabilità già dimostrata di  $|u(x)|$ , si può supporre scelto  $\lambda$  abbastanza elevato perchè

$$\sum |l_i| m(e_i) - \sum_{(\lambda)} |l_i| m(e_i) < \varepsilon;$$

allora

$$\left| \sum' l_i h - \sum_{(\lambda)} l_i h \right| \leq 2\varepsilon.$$

Infine

$$\left| \sum l_i h - \sum_{(\lambda)} l_i h \right| \leq \lambda \frac{2\varepsilon}{\lambda} = 2\varepsilon.$$

Raccogliendo da tutte queste disuguaglianze, tenendo ancora presente la (4), si ha

$$\left| \sum_{(\lambda)} l_i m(e_i) - \sum' l_i h \right| < 6\varepsilon,$$

e così, per la (6),

$$\begin{aligned} (10) \quad \sum_{(\lambda)} l_i m(e_i) - (b - a + 6)\varepsilon - 2\theta &< f(b) - f(a) < \\ &< \sum_{(\lambda)} l_i m(e_i) + (b - a + 6)\varepsilon + 2\theta; \end{aligned}$$

facendo tendere  $\varepsilon$  e  $\theta$  a 0,  $\lambda$  ad  $\infty$ , si ottiene (n. 2):

$$(11) \quad \int_a^b u(x) dx = f(b) - f(a).$$

7. Si è supposto la  $u(x)$  ovunque finita nell'intervallo  $a \dots b$ . Come la proposizione si estenda immediatamente al caso in cui  $u(x) = \infty$  solo in un aggregato riducibile di punti, è evidente. Per vero un tale aggregato si potrà racchiudere, come già l'aggregato  $\mathcal{A}$  del n. 3, in un numero finito di segmenti, la cui lunghezza totale  $\tau$  sia piccola a piacere, e sia pur piccola a piacere la somma  $\omega$  delle oscillazioni di  $f(x)$  in essi. Nei segmenti complementari  $u(x)$  è finita e si possono quindi applicare le precedenti conclu-

sioni. Si avrà allora per una parte che la somma degli incrementi e la somma delle variazioni totali di  $f(x)$  in questi segmenti complementari differiscono per meno di  $\omega$  dall'incremento e dalla variazione totale di  $f(x)$  in  $a \dots b$ ; per altra parte che le  $\sum_{(\lambda)} l_i m(e_i)$ ,  $\sum_{(\lambda)} |l_i| m(e_i)$  estese all'intervallo  $a \dots b$  differiscono dalle somme medesime estese a questi soli segmenti per meno di  $\lambda\tau$ . L'una e l'altra differenza potendosi rendere arbitrariamente piccola, si avrà al limite la proposizione in questione.

8. Confrontando questa proposizione con quella del n. 2 della mia prima Nota citata si vede come quella sia compresa in questa come caso particolare; ma quel che più importa di rilevare è che, malgrado la maggior lunghezza apparente della presente dimostrazione, essa deve considerarsi come più semplice di quella. Inquantochè non si può nascondere che l'operazione di somma estesa ad una catena transfinita (numerabile, però) di elementi che là fu adoperata seguendo l'esempio del sig. Lebesgue, comunque elegante e suggestiva, è pur sempre operazione delicatissima, onde l'averla evitata mi pare un progresso metodologico.

Ed appunto al diverso apprezzamento interno alle attenzioni che occorrono per applicar con rigore simile ragionamento si riduce forse una opposizione di giudizi che riguardo alla proposizione in discorso s'è palesata fra me ed il sig. Lebesgue. Onde non parrà inopportuno alla precisa analisi di questi concetti fondamentali se — lungi da me ogni intenzione polemica — appoggerò qui, con convenienti argomenti, le mie vedute (1).

Occorre ch'io mi riferisca alla pag. 6 dell'ultima Nota del Lebesgue ora ricordata. Egli dice:

« Pour le cas général » (è il caso qui considerato in cui la funzione derivata sia finita, ma non limitata) « portons notre attention sur les K

(1) Mi si permetta di ripetere qui che, qualche obbiezione ch'io possa aver mossa e possa muovere ancora a qualche particolar ragionamento del sig. Lebesgue, non ha diminuito mai l'alta stima e l'interesse con cui io riguardo l'estensione ch'egli ha portato al concetto d'integrale e le importanti applicazioni che ne ha saputo trarre. Nella mia prima Nota più volta citata esponevo qualche dubbio sulle dimostrazioni date dal Lebesgue di due proposizioni: la più importante, quella di cui si tratta qui; l'altra che afferma che *i numeri derivati di una funzione continua costituiscono una funzione di 2<sup>a</sup> classe del Baire*. Il sig. Lebesgue rispose alle mie osservazioni colla Nota già ricordata *Sur les fonctions dérivées* (Questi Rendiconti, vol. XV, 2° sem., pag. 3): dopo le spiegazioni del sig. Lebesgue debbo riconoscere che, con poche parole, riusciva dimostrata completamente, dal suo punto di vista, questa seconda proposizione. Nell'occasione rileverò però che, la dimostrazione da me proposta porta ad un risultato assai più generale: *Se  $g(x, h)$  è una funzione di  $x$  e di  $h$ , continua rispetto ad  $x$  per ogni valore di  $h \neq 0$ , gli involuppi di indeterminazione di  $g(x, h)$  per  $h=0$  (cioè le funzioni costituite dai limiti superiori o dai limiti inferiori, dei valori di  $g(x, h)$  per ogni  $x$  fisso e per  $h$  tendente a 0) sono funzioni della 2<sup>a</sup> classe del Baire*. Riguardo all'altra proposizione il Lebesgue medesimo riconosce in parte l'esattezza delle mie osservazioni: in parte egli le rifiuta, ma nelle sue giustificazioni io non posso convenire.

« premiers termes de la suite  $e_{n_1} e_{n_2} \dots$  <sup>(1)</sup>:  $\sum'$  désignera une somme étendue  
« aux quantités correspondantes; on a

$$(I) \quad \sum' |l_n| m(A_n) - \sum' |l_n| m(B_n) \leq \sum' s_n |l_n|$$

« et l'on peut supposer cette dernière quantité plus petite que  $\varepsilon$ , alors on a

$$(II) \quad \begin{aligned} \sum' |l_n| m(e_n) - \varepsilon &\leq \sum' |l_n| m(A_n) - \varepsilon \leq \sum' |l_n| m(B_n) \\ &\leq \sum |l_n| m(B_n) \leq \sum |l_n| m(A_n) \leq \sum |l_n| m(e_n) + \varepsilon; \end{aligned}$$

« et puisque  $K$  et  $\varepsilon$  sont quelconques, l'énoncé susmentionné est établi dans  
« tous les cas ».

La conclusione mi pare affrettata: si faccia pur crescere indefinitamente il  $K$  e tendere a 0 l' $\varepsilon$ . La disuguaglianza (II) dice soltanto che: *se col tendere di  $K$  ad  $\infty$  e di  $\varepsilon$  a 0 una delle somme  $\sum |l_n| m(B_n)$ ,  $\sum |l_n| m(A_n)$  <sup>(2)</sup> non cresce illimitatamente, la funzione  $|u(x)|$  è integrabile e entrambe quelle somme hanno un limite unico e determinato: l'integrale di  $|u(x)|$ .* Non è questa la proposizione cui il Lebesgue voleva giungere: la funzione  $f(x)$  non ha in essa veruna parte. Occorrerebbe perciò che si potesse affermare in quali condizioni rispetto al comportamento della  $f(x)$  si verifichi l'esistenza di tal limite; e questo pare intenda di dirci il Lebesgue alcune linee sopra il passo citato: « Cette valeur approchée » della variazione totale di  $f(x)$  « est comprise entre  $v_1$  et  $v_1 + \varepsilon(b - a)$  où  $v_1 = \sum |l_p| m(B_p)$  ». È esatta questa affermazione? Si confronti colla definizione della variazione totale d'una funzione data dal Lebesgue medesimo <sup>(3)</sup>:

« Partageons  $a \dots b$  à l'aide des points  $a_0 = a \leq a_1 \leq a_2 \dots \leq a_n = b$ ;  
« la somme

$$v = |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_2) - f(a_1)| + \dots + |f(a_n) - f(a_{n-1})|$$

« est ce qu'on appelle la variation de  $f(x)$  pour le système de points

<sup>(1)</sup> Il significato dei simboli usati dal Lebesgue è molto affine a quello dei simboli analoghi nelle pagine precedenti. Cionondimeno lo indicherò qui brevemente:  $e_{nj}$  sono gli aggregati  $e_i$  del testo, ordinati in un ordine determinato, che potrebbe essere per es. l'ordine crescente degli  $|i|$ .  $a_{nj}$  essendo allora dei numeri per la cui esatta definizione rimando alla Nota o alle *Leçons* del Lebesgue, ma che il lettore può senza inconvenienti, interpretare nei nostri  $\eta_i$ , è  $s_n = \sum_{j=1}^n a_{nj}$ :  $A_n$  e  $B_n$  hanno significato del tutto analogo a quello del testo.

<sup>(2)</sup> Si noti di passaggio il significato tutto particolare di questi limiti: *Fissato* arbitrariamente un numero  $K$  si può disporre delle  $a_{nj}$  in modo che le  $s_n$  che compaiono in  $\sum'$  siano numeri positivi crescenti con  $n$ , arbitrari e tali quindi che  $\sum' s_n |l_n|$  sia arbitrariamente piccolo, per es.  $< \varepsilon$ . Ma se poi si fa variare anche uno solo di questi numeri  $K$  od  $\varepsilon$ , dovranno variare le  $a_{nj}$  e quindi i segmenti che compongono gli aggregati  $A_n, B_n$ ; le somme successive di cui così si cerca il limite non sono quindi le successive approssimazioni di un'unica serie ben determinata.

<sup>(3)</sup> *Leçons*, pag. 49-50.

“  $a_0 \dots a_n$  ”; “ la variation totale de  $f$  est la limite supérieure de l'ensemble “ des nombres  $v$  ”. Ed in questa definizione è sottinteso che *i punti di divisione  $a_0 a_1 \dots a_n$  debbono essere in numero finito*; chè, se anche tal condizione non è esplicitamente affermata, scomparirà ogni dubbio ove si esamini la dimostrazione della proposizione fondamentale (e fondamentale appunto nella presente argomentazione del Lebesgue): “ La variation d'une fonction “ continue, relative à une division quelconque, tend uniformément vers la “ variation totale de cette fonction quand le maximum  $\lambda$  de la longueur des “ intervalles employés tend vers zéro ” <sup>(1)</sup>: si mostra in essa l'ufficio capitale della limitazione del numero  $n$  <sup>(2)</sup>.

9. Però, poichè non basta porre in dubbio una dimostrazione perchè cada la proposizione relativa, non sarà privo d'interesse il mostrare sopra un esempio come *la condizione che  $n$  sia finito sia realmente essenziale nella definizione sopra ricordata della variazione totale* — almeno per quanto riguarda l'attuale sua applicazione.

Si consideri una funzione costante a tratti di Harnack <sup>(3)</sup>, funzione continua, crescente nell'intervallo  $a \dots b$  fra due valori qualunque, per es.  $0 \dots 1$ , costante a tratti e per cui l'aggregato dei segmenti d'invariabilità ha per misura la misura totale dell'intervallo:  $b - a$ . L'aggregato dei punti di variabilità della funzione è perfetto, non denso, di misura nulla, e si ottiene per chiusura dell'aggregato degli estremi dei segmenti di invariabilità. Fissato arbitrariamente un numero  $\lambda$ , si considerino tutti i segmenti di invariabilità di lunghezza  $> 2\lambda$  e a partire dagli estremi di ciascuno di essi, verso l'interno del segmento si porti un segmento di lunghezza  $\lambda$ ; nell'interno di quei segmenti restano così determinati segmenti minori che si divideranno arbitrariamente in segmenti di lunghezza  $\leq \lambda$  mediante punti convenientemente intercalati. Si considerino quindi i segmenti d'invariabilità di lunghezza  $> \lambda$ , non esclusi quelli considerati or ora e verso il loro interno, a partire dagli estremi, si portino segmenti di lunghezza  $\frac{\lambda}{2}$ ; si considerino poi i segmenti di lunghezza  $> \frac{\lambda}{2}$  e si portino, allo stesso modo, in essi segmenti di lunghezza  $\frac{\lambda}{4}$  e così via.

Si vengono così a segnare nell'intervallo  $a \dots b$  una infinità di punti che, nell'ordine in cui si succedono in  $a \dots b$  determinano un sistema di intervalli, tutti contenuti nei segmenti di invariabilità della funzione, e

<sup>(1)</sup> *Leçons*, pp. 52-53.

<sup>(2)</sup> V. particolarmente pag. 53, linee 8 e seg.

<sup>(3)</sup> Harnack, *Math. Ann.* 24; Schoenflies, *Bericht ü. die Mengenlehre*, pp. 166 e seg. Sopra queste funzioni avremo ancora occasione di tornare con maggiori particolari in una Nota successiva.

completamente assimilabile alla catena dei segmenti  $x \dots x + h$  con cui si è da noi e dal Lebesgue ricoperto precedentemente l'intervallo  $a \dots b$  (« C'est-à-dire une suite d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et « tels que chacun d'eux ait pour origine l'extrémité du précédent ou la limite des extrémités des précédents » <sup>(1)</sup>). Cionondimeno la variazione  $v$  relativa a questa divisione dell'intervallo  $a \dots b$  in intervalli parziali è 0, comunque piccolo si prenda  $\lambda$ , mentre la variazione totale della funzione è finita (ed uguale all'incremento  $f(b) - f(a)$ ).

La differenza essenziale fra la presente catena d'intervalli e quella considerata nelle pagine precedenti è precisamente questa: che là l'aggregato dei punti di condensazione degli intervalli che la compongono è riduttibile: qui no. Ne consegue che questo aggregato di punti di condensazione ha, nel 1° caso, misura nulla, *nel senso di Jordan*, tanto esso quanto l'aggregato dei valori corrispondenti della funzione; onde un valore approssimato quanto si vuole alla variazione *calcolata mediante la data catena infinita* si può ottenere mediante una catena finita di segmenti di lunghezza arbitrariamente piccola: ciò non avviene nel 2° caso. E mentre questo fatto ha parte principale nella dimostrazione nostra, esso scompare in quella proposta dal Lebesgue <sup>(2)</sup>.

10. Dalla proposizione dimostrata in questa Nota possono evidentemente dedursi corollari analoghi a quelli del n. 4 della terza mia Nota precedente <sup>(3)</sup>; si avrà per es. che *se una funzione continua ha una funzione derivata finita ovunque meno che in un aggregato riduttibile, ed integrabile, ha derivata unica in ogni punto fatta al più eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla, ed assume in ogni aggregato di punti di misura nulla un aggregato di valori di misura nulla.*

<sup>(1)</sup> Lebesgue, *Sur les fonctions dérivées*, questi Rendiconti, vol. XV, 2° sem., pag. 6.

<sup>(2)</sup> Le precedenti osservazioni, ed il desiderio di evitare ogni apparenza polemica, credo mi dispensino dal fare altri rilievi intorno alla parte residua (pag. 7) della Nota del sig. Lebesgue. Si applica in essa la proposizione ch'era contestata, quindi solo la completa dimostrazione di questa può giustificarla: nè ciò basta ancora qui, a causa di qualche affermazione forse un po' arbitraria: così l'applicazione della proposizione in discorso a derivate che divengono infinite, e così ancora l'affermazione che si può supporre la serie dei valori della derivata infinita in un senso solo.

<sup>(3)</sup> Questi Rendiconti, 1° sem., pag. 681.

**Geodesia.** — *Sull'espressione generale della gravità all'esterno di un pianeta, del quale una superficie esteriore di equilibrio sia un ellissoide.* Nota di ADOLFO VITERBI <sup>(1)</sup>, presentata dal Corrispondente P. PIZZETTI.

3. Ora, per compiere la ricerca iniziata nella Nota precedente, dobbiamo, in primo luogo, calcolare l'espressione dell'intensità della gravità all'esterno di E; il che però ci limiteremo a fare solo per i punti di questa superficie.

È bensì vero che dalla (IV°) sarebbe facile dedurre, con semplici derivazioni, l'espressione della gravità relativa al pianeta in esame lungo una direzione qualsivoglia, e ciò per ogni punto esterno alla massa potenziente.

Se non che a noi interessa precipuamente soltanto la conoscenza dell'intensità della gravità, in punti dell'ellissoide E; cioè, ove in particolare si considerasse il Geoide, supposto coincidente con un ellissoide, la conoscenza dell'intensità della gravità, ridotta al Geoide stesso. È per questo che, come si è detto, ci restringeremo a calcolare, in base alla (IV°), l'espressione di questa intensità, ridotta a punti dell'ellissoide E. Ciò facciamo anche per evitare un inutile spreco di spazio. Diremo  $g$ , in base alla notazione universalmente in uso, la funzione cercata.

Ora, per il calcolo da eseguirsi, torna molto opportuno servirsi delle coordinate ellittiche. Ricorderemo pertanto che, dette  $\mu, \nu$  le altre due radici della (4), si hanno fra le coordinate ellittiche  $\lambda, \mu, \nu$  e le considerate coordinate cartesiane, ortogonali dei punti dello spazio, le note relazioni:

$$(14) \quad x^2 = \frac{(\lambda + a^2)(\mu + a^2)(\nu + a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

con le altre due analoghe che si ottengono da questa per  $y, z$ , scambiando successivamente  $a$  con  $b$  e con  $c$ .

Dicasi quindi  $dn$  l'elemento di normale ad uno qualunque degli ellissoidi omofocali a E, corrispondente a un dato valore  $\lambda$ , fra quelli che è suscettibile di assumere il parametro  $\lambda$ , in un punto P qualsivoglia della superficie stessa. Di questo siano  $\mu, \nu$  le altre due coordinate ellittiche.

Allora il valore del quoziente differenziale:  $\frac{dn}{dn}$  in P sarà dato, quando, come

<sup>(1)</sup> V. Nota precedente a pag. 276.

devesi fare ora, si consideri la normale *esterna* alla superficie, dalla relazione pure ben nota:

$$\frac{du}{dn} = - \frac{1}{\sqrt{(\bar{\lambda} - \mu)(\bar{\lambda} - \nu)}}.$$

In un punto qualunque di E si avrà, poichè allora  $\lambda = 0$ :

$$\frac{du}{dn} = - \frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}.$$

Ora, lungo le traiettorie ortogonali agli ellissoidi omofocali a E varia delle tre coordinate ellittiche soltanto  $\lambda$  (ossia  $u$ ) <sup>(1)</sup>. Avremo perciò in ogni punto di E:

$$g = \frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial u} \frac{du}{dn} = - \frac{\partial W}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}.$$

Per semplicità riterremo, senz'altro sottinteso che ogniquale si parlerà di intensità  $g$  della gravità per la massa planetaria in parola, ossia di derivata di  $W$  *lungo la normale* ad una delle superficie di livello:  $W = \text{cost}$  ci si riferisca sempre all'intensità della gravità corrispondente a punti di E, vale a dire alla derivata di  $W$  lungo la normale alla superficie E in uno de' suoi punti. Ciò premesso osserviamo che in virtù delle (15), (15') potremo porre (poichè al valore:  $u = 0$  corrisponde per  $\lambda$  il valore:  $\infty$ ):

$$U^{(0)} = 2u$$

e in pari tempo:

$$U_x^{(2)} = 2 \int_0^u \left( 1 - \frac{3x^2}{p\bar{u} - e_a} - \frac{y^2}{p\bar{u} - e_b} - \frac{z^2}{p\bar{u} - e_c} \right) \frac{d\bar{u}}{p\bar{u} - e_a},$$

$$U_{xy}^{(2)} = - 4xy \int_0^u \frac{d\bar{u}}{(p\bar{u} - e_a)(p\bar{u} - e_b)}$$

con le altre relazioni analoghe che si ottengono permutando circolarmente fra di loro  $x, y, z$  e in pari tempo  $a, b, c$  e quindi  $e_a, e_b, e_c$ , ( $u$  designi in queste formule il valore di questo parametro che compete al punto *potenziato*).

Inoltre, posto brevemente:

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad n_z = \frac{\partial z}{\partial n},$$

(1) Infatti detti ellissoidi possono definirsi come le superficie:  $\lambda = \text{cost}$ .

avremo dalle (14) (in punti di E):

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} xn_x &= - \frac{p'u_0 (\mu + a^2) (\nu + a^2)}{2 (a^2 - b^2) (a^2 - c^2) \sqrt{\mu\nu}}, \\ yn_y &= - \frac{p'u_0 (\mu + b^2) (\nu + b^2)}{2 (b^2 - a^2) (b^2 - c^2) \sqrt{\mu\nu}}, \\ zn_z &= - \frac{p'u_0 (\mu + c^2) (\nu + c^2)}{2 (c^2 - a^2) (c^2 - b^2) \sqrt{\mu\nu}}, \end{aligned} \right.$$

ove con  $u_0$  si sia designato il valore di  $u$ , radice dell'equazione <sup>(1)</sup>:

$$pu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

e  $z_0$  designi il valore di  $z$ , relativo a punti di E, offerto cioè dalla (8).

Avremo allora evidentemente in punti di E (poichè in essi:  $pu - e_a = a^2$  ecc. ecc.):

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n} &= \frac{2 p'u_0}{\sqrt{\mu\nu}} \left\{ \frac{3 (\mu + a^2) (\nu + a^2)}{(a^2 - b^2) (a^2 - c^2)} A_1 + \frac{(\mu + b^2) (\nu + b^2)}{(b^2 - a^2) (b^2 - c^2)} C_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mu + c^2) (\nu + c^2)}{(c^2 - a^2) (c^2 - b^2)} B_2 \right\} + \frac{2x^2}{a^4} \frac{1}{\sqrt{\mu\nu}} \\ \frac{\partial U_{xy}^{(2)}}{\partial n} &= \frac{2 p'u_0}{\sqrt{\mu\nu}} \left\{ \frac{(\mu + a^2) (\nu + a^2)}{x (a^2 - b^2) (a^2 - c^2)} y + \frac{(\mu + b^2) (\nu + b^2)}{y (b^2 - a^2) (b^2 - c^2)} x \right\} C_2 + \\ &\quad + \frac{4 xy}{a^2 b^2 \sqrt{\mu\nu}}, \end{aligned} \right.$$

con le altre relazioni analoghe per le rimanenti funzioni armoniche, ellissoidali da considerarsi. Si noti pure che evidentemente l'espressione di:

$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial n}$  si ricava subito dalla (14). È poi superfluo, perchè trattasi di cosa chiara per sè stessa, accennare come le formule considerate vadano adattate ai casi speciali, in cui una delle  $x, y, z$  o due di esse assumano il valore zero.

Le relazioni stabilite ora, ne permettono di costruire senz'altro l'espressione dell'intensità della gravità per punti di E.

Quando si vogliano porre, in essa, in evidenza gli angoli  $\psi, \vartheta$ , che individuano la direzione dell'asse di rotazione, potremo infatti dedurre  $g$

<sup>(1)</sup> Ben inteso l'equazione in parola definisce il valore di  $u$ , a meno di somme di multipli dei periodi relativi alle funzioni ellittiche considerate. Ciò era quasi superfluo far notare.

dalla relazione seguente, che si ricava come immediata conseguenza dalla (IV°), associata alle (11), (11'), (12), (13):

$$\begin{aligned}
 (V) \quad g = & g_1 + \cos^2 \vartheta \operatorname{sen}^2 \psi \left( m_1 \frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n} + m_2 \frac{\partial U_y^{(2)}}{\partial n} - x n_x \omega^2 \right) + \\
 & + \operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen}^2 \psi \left( n_1 \frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n} + n_2 \frac{\partial U_y^{(2)}}{\partial n} - y n_y \omega^2 \right) + \\
 & + \operatorname{sen}^2 \psi \left( p_1 \frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n} + p_2 \frac{\partial U_y^{(2)}}{\partial n} + z_0 n_z \omega^2 \right) - \\
 & - \omega^2 \operatorname{sen}^2 \psi \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{1}{2C_2} \frac{\partial U_{xy}^{(2)}}{\partial n} + x n_x + y n_y \right) + \\
 & + \omega^2 \cos \vartheta \operatorname{sen} \psi \cos \psi \left( \frac{1}{2B_2} \frac{\partial U_{xz}^{(2)}}{\partial n} + x n_x + z_0 n_z \right) + \\
 & + \omega^2 \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \psi \cos \psi \left( \frac{1}{2A_2} \frac{\partial U_{yz}^{(2)}}{\partial n} + y n_y + z_0 n_z \right).
 \end{aligned}$$

Qui si designò col simbolo  $g_1$  la derivata  $\frac{\partial W_1}{\partial n}$ , calcolata per il punto considerato di E: vale a dire, l'intensità della gravità che si avrebbe nel punto stesso <sup>(1)</sup> quando la rotazione uniforme del pianeta avvenisse intorno all'asse  $z$ . L'espressione di  $g$ , si ha subito dalle formule del prof. Pizzetti.

Naturalmente nella V°, a  $n_x, n_y, n_z$ ,  $\frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial U_y^{(2)}}{\partial n}$  ecc., vanno sostituite le espressioni che per esse ci sono offerte dalle (17), (18) oltrechè dalle relazioni analoghe a queste ultime che si deducono in modo di per sè evidente.

La V° è appunto la relazione che pone in evidenza le variazioni che sull'intensità della gravità, relativa a punti dell'ellissoide E, sono determinate dalla considerata derivazione dell'asse di rotazione rispetto all'asse  $z$ .

4. Quando le formule stabilite si vogliano applicare al caso della Terra, ammettendo, come è lecito fare con un'approssimazione sufficiente nella presente ricerca, che il Geoide coincida con un ellissoide, le formule stesse si semplificano in primo luogo, perchè l'ellissoide da considerarsi è allora di rivoluzione (intorno all'asse  $z$ ). Si dovrà cioè porre in tal caso:  $a = b$ , mentre sempre:  $c < a$ . È allora evidente in qual maniera si modifichino le funzioni armoniche ellissoidiche e le loro derivate che servono al calcolo di  $W$  e di  $g$ . Ed è pure evidente per sè e ben noto in qual modo le funzioni ellittiche che servono al calcolo effettivo di dette funzioni degenerino in funzioni trigonometriche. È pure chiaro come allora:

$$A_1 = B_1 = C_2, \quad A_2 = B_2.$$

<sup>(1)</sup> Appunto ne interessa in particolare, determinare l'espressione della differenza:  $g - g_1$ .

Però, in sostanza, le  $(IV^{\circ})$ ,  $(V^{\circ})$  non subiscono semplificazioni che importino *modificazioni essenziali*, quando si consideri l'ipotesi particolare caratterizzata dall'essere  $E$  un ellissoide di rivoluzione. Perciò potremo, anche parlando dell'ellissoide col quale riterremo confuso il Geoide, valerci delle  $(IV^{\circ})$ ,  $(V^{\circ})$ , ove sia senz'altro sottinteso che dette relazioni vadano allora modificate in base all'ipotesi:  $a = b$ . Naturalmente designeremo per semplicità, l'accennato ellissoide col nome di « *ellissoide terrestre* », giusta una norma generalmente seguita.

Trattando dunque in particolare di quest'ellissoide possiamo affermare che :

*Poichè le osservazioni (astronomiche) di latitudine, le quali da molti anni sono eseguite in apposite stazioni permettono di caratterizzare la direzione (variabile col tempo) dell'asse di rotazione terrestre rispetto all'asse minore dell'ellissoide terrestre; ove osservazioni di gravità, eseguite simultaneamente a quelle di latitudine e al pari di queste ripetute a brevissimi intervalli per lungo tempo, permettessero di rilevare le variazioni che nella gravità stessa determinano mutamenti di direzione dell'asse della rotazione diurna, si potrebbe evidentemente, applicando la  $\bar{V}^{\circ}$ , ritrarre dalle predette misure di gravità, un controllo a quelle di latitudine.*

Anzi sarebbe ancora possibile, determinare in modo molto semplice, con sole misure di gravità, i valori di  $\vartheta$ ,  $\psi$ : questo indipendentemente dalle osservazioni di latitudine. Ciò renderebbe ancora più completo il reciproco controllo fra le due classi di osservazioni.

Per determinare i valori di  $\vartheta$ ,  $\psi$  caratterizzanti la direzione dell'asse di rotazione terrestre in una data epoca, converrebbe evidentemente considerare le equazioni del tipo  $(\bar{V}^{\circ})$  corrispondenti a numerosi punti terrestri in ciascuno dei quali si siano fatte osservazioni di gravità nell'epoca considerata (riducendo poi al livello del mare i valori ottenuti dalle misure). Detto  $g$  il valore dell'intensità della gravità così dedotto da osservazioni fatte in un dato punto,  $g_1$  il valore calcolato per il punto stesso, nell'ipotesi:  $\vartheta = \psi = 0$ , si otterrà così dalla differenza:

$$\Delta g = g - g_1$$

l'ammontare della *perturbazione* della gravità (nel punto in esame), corrispondente ad uno spostamento dell'asse di rotazione, o meglio alla sua deviazione rispetto all'asse designato con  $z$ , nell'epoca in cui si fecero le osservazioni.

Dall'insieme delle equazioni del tipo  $(\bar{V}^{\circ})$ , ottenute combinando nel modo indicato le determinazioni sperimentali fatte nei vari punti considerati, con opportuni calcoli, si dovranno poi dedurre, col metodo dei minimi quadrati, i valori più convenienti di  $\psi$ ,  $\vartheta$ . Naturalmente la forma stessa della  $(\bar{V}^{\circ})$  mostra come, quando si volesse eseguire l'accennata determinazione col

massimo rigore possibile, occorrerebbe poi applicare i ben noti metodi approssimati ai quali è mestieri ricorrere, allorchè si devono considerare *relazioni osservate* non lineari. Se non che, attesa la estrema piccolezza degli spostamenti dell'asse terrestre si possono invece, nella pratica, semplificare sin dall'inizio le relazioni della forma  $(\bar{V}^0)$  che occorre prendere in esame. Così, quando si ritengano trascurabili, in una prima approssimazione tutti i termini di ordine superiore al  $1^0$  in  $\psi$ ,  $\vartheta$  ciascuna equazione del tipo  $(V^0)$  si ridurrà ad una della forma:

$$(\bar{V}_1^0) \quad Ag = \omega^2 \psi \left( \frac{1}{B_z} \frac{\partial U_{zz}^{(2)}}{\partial n} - x n_x - z_0 n_x \right)$$

che è indipendente da  $\vartheta$  (Si vede infatti subito come nella  $(V^0)$ ,  $\vartheta$ , che possiamo dire *deviazione dell'asse in longitudine*, non entri se non in termini di ordine non inferiore al  $II^0$  rispetto allo stesso  $\vartheta$  e a  $\psi$ ). È poi evidente come ad equazioni del tipo  $(V^0)$  si possano sostituire equazioni del tipo  $(\bar{V}^0)$  solo quando gli angoli  $\psi$ ,  $\vartheta$  siano tanto piccoli da potersi ritenere, senza errori apprezzabili, gli angoli stessi coincidenti con i rispettivi seni, e quindi in pari tempo:  $\cos \vartheta = \cos \psi = 1$ . Si dovrà poi naturalmente verificare che anche le differenze  $Ag$ , riferite alla corrispondente unità di misura siano molto piccole.

Nell'accennato ordine di approssimazione la compensazione delle osservazioni fatte si compirebbe mercè la semplice applicazione del principio della media aritmetica.

Relativamente all'effettiva determinazione degli elementi caratterizzanti la direzione dell'asse di rotazione, in base alle equazioni  $(\bar{V}^0)$  oppure  $(\bar{V}_1^0)$  è bene osservare come essa richieda la conoscenza delle coordinate cartesiane, ortogonali che servono a individuare la posizione dei singoli punti del Geoide, ai quali si riferiscono le osservazioni. Queste coordinate si devono naturalmente dedurre da quelle geografiche determinate con osservazioni astronomiche. Il calcolo necessario al passaggio da queste coordinate a quelle richiede evidentemente, per essere eseguito, la conoscenza della direzione dell'asse di rotazione terrestre, direzione che potrà essere data soltanto da una lunga serie di osservazioni. Senza però essere costretti a ricorrere a queste, si potrà, nella pratica, fare uso del procedimento seguente:

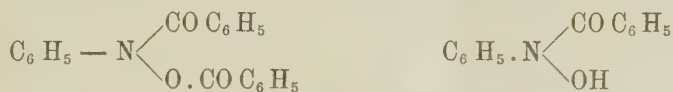
Con i valori delle coordinate geografiche, dedotti da osservazioni astronomiche, fatte nei punti che è mestieri considerare, si determineranno le coordinate cartesiane, ortogonali dei punti stessi, in base ad un'ipotesi solo grossolanamente approssimata sulla direzione dell'asse della rotazione diurna. Ad es. si supporrà questo coincidente col semiasse minore dell'ellissoide terrestre. Indi, con i valori di  $x$ ,  $y$ ,  $z_0$  così calcolati e con i risultati di osservazioni gravimetriche eseguite contemporaneamente a quelle astronomiche nei varî punti in esame, si determinerà in una prima approssimazione, applli-

cando la ( $\bar{V}^0$ ) (o la  $\bar{V}_I^0$ ) la direzione dell'asse di rotazione. In base al risultato di tale calcolo si potranno dai predetti valori delle coordinate geografiche dedurre valori più approssimati dei precedenti, per le coordinate cartesiane dei punti in esame: a lor volta questi valori introdotti nelle relazioni del tipo ( $V^0$ ) (o ( $\bar{V}_I^0$ )) permetteranno di individuare valori meglio approssimati di  $\vartheta$ ,  $\psi$  (o rispettivamente di  $\psi$ ), e così di seguito si ripeterà tale procedimento, finchè si siano per le incognite del problema ricavati valori convenientemente esatti. È chiaro come, stante la piccolezza delle deviazioni dell'asse di rotazione terrestre dall'asse  $z$ , il procedimento indicato condurrà rapidamente allo scopo da raggiungersi.

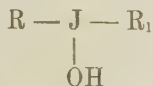
**Chimica.** — *Comportamento dell'aldeide benzoica in presenza di jodilbenzolo e sotto l'azione della luce* <sup>(1)</sup>. Nota preliminare di LUIGI MASCARELLI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Le ricerche di Ciamician e Silber sull'azione chimica della luce e specialmente quelle sul comportamento di un miscuglio di nitrobenzolo e aldeide benzoica <sup>(2)</sup>, mi indussero a studiare l'andamento della reazione nel caso che al nitrobenzolo venisse sostituito il jodilbenzolo. E qui esprimo pubblicamente la mia gratitudine al prof. Ciamician ed al dott. Silber, i quali mi permisero di compiere l'esperienza relativa.

Come si sa, da una miscela di nitrobenzolo e aldeide benzoica esposta alla luce si ottengono parecchi prodotti; alcuni derivano più specialmente dall'aldeide stessa, quale sarebbe la resina fondente a 125-130° <sup>(3)</sup> che si mostrò essere un polimero dell'aldeide benzoica medesima, altri invece derivano dall'azione reciproca delle due sostanze reagenti; a questi appartengono i prodotti di sostituzione della fenilidrossilamina e cioè:



Non nego che l'esperienza mia fosse stata intrapresa nella speranza di poter ottenere una qualche sostanza del tipo della idrossilamina sostituita, ma che però contenesse jodio in luogo dell'azoto. Mi sembrava che tale idea potesse trovare un certo appoggio nel fatto che da molto tempo sono note le basi jodiche del tipo



<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna, agosto 1906.

<sup>(2)</sup> Rend. Acc. Lincei, 1905, I, 265.

<sup>(3)</sup> Gazz. Ch. It. 34, II (1904).

dove R e R<sub>1</sub> indicano due radicali aromatici, basi scoperte da V. Meyer e Hartmann <sup>(1)</sup> e studiate ulteriormente da Willgerodt.

Finora non potei isolare alcuna sostanza di questo tipo, però non ritengo si debba escludere completamente la formazione di qualche composto contenente aggruppamenti simili.

Prescindendo dalla reazione principale, che è una semplice reazione di ossidazione, dovuta alla proprietà ossidante del jodilbenzolo e che è rappresentabile coll'equazione:



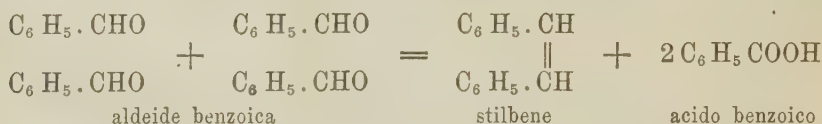
si osserva che il jodilbenzolo non solo non disturba la polimerizzazione dell'aldeide, poichè fra i prodotti della reazione si riscontra una grande quantità di resina identica a quella ottenuta da Ciamician e Silber (l. c.), ma anzi favorisce tali polimerizzazioni, tanto che potei isolare un nuovo isomero e precisamente un *trimero dell'aldeide benzoica*:



sostanza bianca, assai stabile, difficilmente solubile nei soliti solventi, ma che si può avere cristallina dall'acido acetico glaciale, nel qual caso fonde a 250°.

Se le proprietà polimerizzanti siano da attribuirsi al jodilbenzolo (che si forma nella ossidazione dell'aldeide ad acido) o meglio a tracce di jodio che si rendono libere durante la reazione (poichè è noto che la presenza di jodio favorisce le polimerizzazioni), son cose queste che esperienze ulteriori dovranno mettere in chiaro. Ad ogni modo la formazione di questo nuovo polimero è assai interessante, perchè mostra che la tendenza a dare sostanze polimere non è limitata ai soli primi termini delle aldeidi grasse.

Inoltre fra i composti isolati si trova anche lo *stilbene*, la qual cosa farebbe ritenere completamente distinto l'andamento della reazione nel caso del jodilbenzolo da quello del nitrobenzolo. Le ipotesi che si possono avanzare per chiarire la formazione di stilbene sono essenzialmente due. Anzitutto si può ammettere che sia dovuta ad un semplice processo di riduzione dell'aldeide, processo che si può esprimere con l'equazione complessiva:



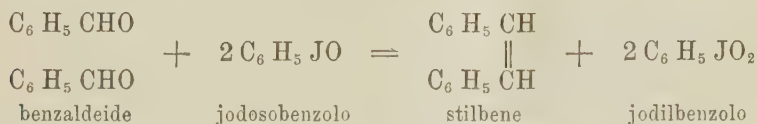
In questa reazione deve intervenire l'azione catalizzatrice del jodilbenzolo. E qui non è difficile dare una spiegazione. Difatti se si ammette che

<sup>(1)</sup> Ber. d. deutsch Chem. Gesell. 27, 426 (1894).

il jodilbenzolo ossidando passi dapprima a jodosobenzolo, secondo l'equazione:



si può anche immaginare che in un secondo tempo il jodosobenzolo agisca da riducente sull'eccesso di aldeide:

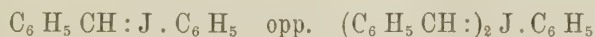


E per vero, che il jodosobenzolo abbia anche proprietà riducenti è manifesto dal fatto che per semplice ebollizione con acqua si ossida autoriducendosi <sup>(1)</sup>:



D'altra parte è noto che lo stilbene si ha per sottrazione di ossigeno alla aldeide benzoica: così Williams <sup>(2)</sup> lo preparò distillando l'aldeide sul sodio metallico; Barbaglia e Marquardt <sup>(3)</sup> lo ebbero scaldando l'aldeide con fiori di zolfo.

Tuttavia questa interpretazione non ne esclude un'altra, la quale troverebbe appoggio nel fatto che pare, che lo stilbene in parte almeno si formi nella distillazione di un prodotto oleoso più complicato, che non potè ancora essere ottenuto puro. La piccola quantità di sostanza avuta non mi permise di stabilire esattamente questo punto. Ad ogni modo la presenza di jodio nell'olio (che bolle press'a poco alla temperatura dello stilbene da cui quindi è difficile a separarsi) è un buon indizio per supporre che una parte di esso possa essere costituito da un composto del tipo:



il quale, come facilmente si scorge, nella distillazione darebbe subito stilbene e jodobenzolo.

Questa seconda interpretazione sembra poi anche più conforme al comportamento dello stilbene alla luce: difatti, sempre per le ricerche di Ciamician e Silber <sup>(4)</sup>, si sa che lo stilbene in presenza di ossigeno ed alla luce non è stabile, ma si ossida ad aldeide benzoica e poi ad acido benzoico.

La questione non può essere risolta senza numerose altre esperienze, qui mi basta di averla accennata.

<sup>(1)</sup> Willgerodt, Ber. d. deutsch. Chem. Gesell. 25, II, 3494 (1892) e 26, II, 1307 (1893).

<sup>(2)</sup> Zeitschr. f. Chem. 1867, 432.

<sup>(3)</sup> Gazz. Ch. It., 21, 202.

<sup>(4)</sup> Ber. d. deutsch. Chem. Gesell., 36, 4266.

## PARTE SPERIMENTALE.

Saldati in tubo di vetro furono esposti alla luce (dal  $^{31}/_7$ -1905 al  $^{21}/_5$ -1906) gr. 200 di aldeide benzoica e gr. 50 di jodilbenzolo. All'apertura del tubo non si manifestò pressione interna, il contenuto era costituito di una parte liquida giallo-brunastra e di una parte solida (cristalli quasi incolori, ben formati di acido benzoico). Trattai tutto con etere, il quale lasciò indisciolta una polvere biancastra (circa 2 gr.) che tal quale fondeva a 240-245°. Questa sostanza cristallizza dall'acido acetico glaciale e bolle in prismetti aciculari perfettamente bianchi ed allora fonde a 250°. Essa è praticamente insolubile a freddo negli ordinari solventi, dal benzolo dove è poco solubile anche a caldo si riottiene in minutissimi prismetti. La composizione centesimale ricavata dalla analisi elementare corrisponde a quella dell'aldeide benzoica.

Infatti:

gr. 0.1370 di sost. seccata a 110° diedero 0.3984 gr.  $\text{CO}_2$ ; 0.0707 gr.  $\text{H}_2\text{O}$  in 100 parti:

| °/o Trovato | Calcolato per $\text{C}_7\text{H}_6\text{O}$ |
|-------------|----------------------------------------------|
| C 79.31     | 79.24                                        |
| H 5.77      | 5.66                                         |

Il peso molecolare determinato per via ebullioscopica in bromuro d'etilene diede: 304 e 278  $[(\text{C}_7\text{H}_6\text{O})_3 = 318]$ .

Si tratta quindi di un trimero dell'aldeide benzoica.

La parte sciolta dall'etere venne, dopo aver scacciato il solvente, distillata in corrente di vapor acqueo, in questo modo nel distillato passò l'eccesso di aldeide, il jodobenzolo formatosi nella reazione e piccole quantità di acido benzoico. La parte non distillata lasciò cristallizzare per raffreddamento l'acido benzoico, mentre l'olio denso brunastro che l'accompagnava solidificò in massa vischiosa. Questa massa sciolta in etere fu lavata con soluzione di carbonato sodico a fine di liberarla dall'acido benzoico; scacciato l'etere si ottenne un olio denso giallastro, che stentava a solidificare. L'etere di petrolio promuove la solidificazione della maggior parte della massa, mentre ne estrae una parte oleosa di color giallo bruno. La parte indisciolta è costituita dalla resina già descritta da Ciamician e Silber (l. c.).

L'olio estratto dall'etere di petrolio distillato nel vuoto non mostrò di avere un punto d'ebollizione costante. Le prime porzioni contenevano ancora un po' di jodobenzolo, le altre erano costituite da un olio giallo-rossastro che aveva tendenza a cristallizzare in parte. Asportata per filtrazione la parte solida venne trattato l'olio, in soluzione eterea, con carbone animale e poi ridistillato a pressione ordinaria; la parte bollente tra 280-315° è un liquido denso di color giallo oro, che stando a sè lascia separare una sostanza cri-

stallizzata bianca; la parte bollente sopra i 315° è un olio bruno che col tempo deposita cristalli.

Tutte queste frazioni vennero filtrate, si unirono tutte le porzioni cristalline che si sciolsero in etere e si lavarono con potassa diluitissima fino a reazione neutra (la soluzione eterea aveva reazione acida dovuta ad acido benzoico). Il residuo lasciato da questa soluzione eterea venne cristallizzato dall'alcool. Si ottennero per tal modo bellissimi cristalli ben sviluppati in tavole romboidali splendenti dal p. f. 123-4°. L'analisi elementare dimostrò che questa sostanza è un idrocarburo della composizione dello stilbene.

Infatti:

gr. 0.1473 di sost. diedero 0.5050 gr. CO<sub>2</sub> ; 0.0907 gr. H<sub>2</sub>O  
in 100 parti:

| Trovato | Calcolato per C <sub>14</sub> H <sub>12</sub> |
|---------|-----------------------------------------------|
| C 93.50 | 93.34                                         |
| H 6.9   | 6.66                                          |

Il comportamento di questo idrocarburo verso la soluzione eterea di bromo accertò trattarsi di stilbene. Infatti si ottenne un derivato bromurato fondente a 236°, temperatura che concorda con quella assegnata da Zincke <sup>(1)</sup> al composto C<sub>6</sub> H<sub>5</sub> CH Br . CH Br C<sub>6</sub> H<sub>5</sub> da lui preparato per azione a 0° del bromo su soluzione eterea di stilbene.

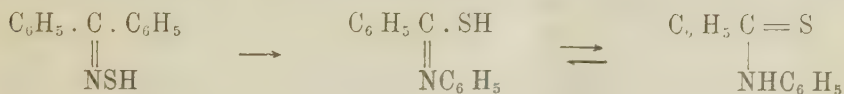
La parte oleosa da cui venne separato lo stilbene sottoposta a nuova distillazione diede altro stilbene: ciò fa supporre che questo idrocarburo possa provenire dalla decomposizione della parte oleosa. Purtroppo l'esigua quantità di prodotto non mi permise di accertare questo punto e tanto meno di stabilire la composizione dell'olio.

Chimica. — *Sulla formazione e sul contegno della tiobenzanilide*. Nota di R. CIUSA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Allo scopo di preparare la tiobenzofenonossima ho fatto agire il pentasolfuro di fosforo sulla benzofenonossima.



La reazione va molto probabilmente nel senso indicato; ma la tioossima formatasi si trasforma nella tiobenzanilide <sup>(2)</sup>.



<sup>(1)</sup> Liebig's Ann., 198, 127.

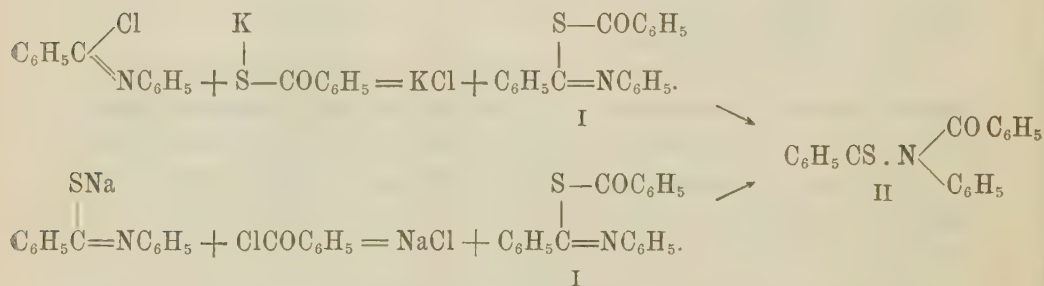
<sup>(2)</sup> La geniale interpretazione della trasposizione di Bechmann data ultimamente da O. Wallach (A. 346, 273) trova nel passaggio dalla tiobenzofenonossima nella tiobenzanilide una nuova conferma.

La tiobenzanilide fu preparata e descritta diverse volte <sup>(1)</sup> con punti di fusione sempre differenti. La causa di ciò sta nel fatto che questa sostanza non si potè ancora ottenere assolutamente pura e priva di sostanze più ricche di zolfo che inevitabilmente l'accompagnano.

Io l'ho purificata cristallizzandola dall'alcool e dalla ligroina indi precipitandola dalla soluzione in potassa diluita, con anidride carbonica, e ricristallizzandola ancora una volta dalla ligroina. Non sono riuscito ad innalzare il punto di fusione al di là di 96°.

La tiobenzanilide dà con nitrato d'argento un sale formato da due molecole di tioanilide ed uno di nitrato d'argento: come hanno trovato Francesconi e E. Piazza, anche le ossime si comportano analogamente col nitrato d'argento <sup>(2)</sup>.

Dalla tiobenzanilide si può preparare facilmente col metodo di Schotten e Baumann il corrispondente derivato benzoilico. Questo derivato fu già ottenuto da G. S. Jamieson per azione del tiobenzoato di potassio sopra la clorimide della benzanilide, come pure per azione del cloruro di benzoile sul sale sodico della tiobenzanilide <sup>(3)</sup>



Se ora questo derivato benzoilico debba considerarsi com un S-derivato benzoilico I (come si potrebbe dedurre facilmente dal modo di formazione, dalla facilità con cui si ottiene col metodo di Schotten e Baumann, e dalla sua colorazione) o come un N-derivato benzoilico II (come risulterebbe dalle ricerche di Wheeler e Johnson <sup>(4)</sup>), è una questione non ancora risolta completamente, e che merita uno studio ulteriore.

Molto interessante si presenta la riduzione della tiobenzanilide. Per azione della polvere di zinco sulla soluzione alcalina bollente della tiobenzanilide si ottiene immediatamente un olio giallognolo che dà, per ebullizione

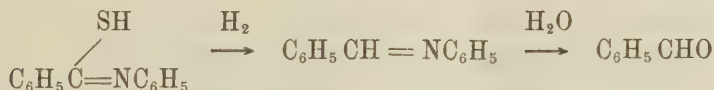
(1) A. 192, 31; 259, 301; 264, 184. B. 10, 2134; 11, 503; 25, 3525. B. 36, 585.

(2) C. 1903 [2] 878.

(3) A. Chem. Soc. 26, 177.

(4) Am. Ch. J. 30, 24.

con acido cloridrico diluito benzaldeide. La riduzione avviene nel senso indicato dalle formule seguenti:



Data la facilità colla quale si possono ottenere le tioanilidi, questa reazione ci fornisce un metodo molto facile e pronto per ottenere da un acido l'aldeide corrispondente. Il passaggio da un acido all'aldeide fu ultimamente

studiato da Franz Henle (<sup>1</sup>). Per riduzione degli imidoeteri  $\text{R} \cdot \text{C} \begin{smallmatrix} \text{NH} \\ \diagup \\ \text{OC}_2\text{H}_5 \end{smallmatrix}$  in soluzione acida quest'autore ottiene quantitativamente benzaldeide.

Il metodo proposto da Franz Henle è molto analogo al mio; quest'ultimo presenta però un vantaggio incontestabile nella maggiore facilità di preparazione delle tioanilidi. Mi riservo di applicare questo metodo alla preparazione di altre aldeidi.

1. *Preparazione della tiobenzanilide.* — Mescolando porzioni uguali di pentasolfuro di fosforo e benzofenonossima finamente polverizzati e secchi e riscaldando il miscuglio, si ha verso 80° una reazione violenta con proiezione di sostanza fusa. Per moderare la reazione e raccogliere i prodotti bisogna operare come segue.

In un pallone di  $\frac{1}{2}$  litro unito ad un refrigerante ascendente si sciolgono gr. 6 di pentasolfuro in 200 cm<sup>3</sup> di solfuro di carbonio, indi si raggiungono gr. 12 di benzofenonossima di fresco preparata e si fa bollire il tutto per due ore. Il miscuglio, da prima leggermente giallognolo, alla fine è colorato in rosso giallo intenso. Dopo raffreddamento si filtra. Dal liquido filtrato per evaporazione completa del solvente si ottengono 8 gr. di una sostanza cristallina di color giallo canarino. In fondo al pallone della reazione rimane una sostanza rossastra e pastosa che trattata con 200 cm<sup>3</sup> di potassa al 10 % si scioglie in parte. Si filtra, la soluzione alcalina si acidifica con acido cloridrico diluito e la sostanza giallognola che precipita (gr. 3) si unisce alla sostanza ottenuta direttamente per evaporazione del solfuro di carbonio. La tiobenzanilide così ottenuta si cristallizza, come ho detto nell'introduzione, da poco alcool, poi dalla ligroina, indi si scioglie a freddo in potassa al 10 %. Il liquido alcalino si estrae con etere, e si rimette in libertà la tioanilide precipitandola dalla soluzione alcalina con anidride carbonica. Con una successiva cristallizzazione dalla ligroina si ottiene sufficientemente pura come lo dimostrano i numeri che fornisce l'analisi.

(<sup>1</sup>) B. 35, 3039.

1. Gr. 0,1535 di sost. diedero gr. 0,4157 di  $\text{CO}_2$ , e gr. 0,0727 di  $\text{H}_2\text{O}$ .
2. " 0,1286 " " " 0,3448 " " 0,0689 " "
3. " 0,1088 " " " 0,2928 " " 0,0575 " "
4. " 0,1556 " "  $\text{cm}^3$  9,3 di N ( $26^\circ, 760 \text{ mm.}$ )
5. " 0,1707 " " gr. 0,1911 di  $\text{Ba SO}_4$
6. " 0,0666 sciolti in gr. 4,585 di benzolo diedero un abbassamento del

P. d. C. di  $0^\circ, 302$ .

| Calcolato per                         |       | Trovato |       |       |      |       |     |
|---------------------------------------|-------|---------|-------|-------|------|-------|-----|
| $\text{C}_{13}\text{H}_{11}\text{NS}$ |       | 1       | 2     | 3     | 4    | 5     | 6   |
| C                                     | 73,23 | 73,87   | 73,13 | 73,21 | —    | —     | —   |
| H                                     | 5,16  | 5,25    | 5,95  | 5,87  | —    | —     | —   |
| N                                     | 6,57  | —       | —     | —     | 6,63 | —     | —   |
| S                                     | 15,02 | —       | —     | —     | —    | 15,34 | —   |
| P. M                                  | 213   | —       | —     | —     | —    | —     | 203 |

La tiobenzanilide cristallizza dall'alcool in tavole quadrate gialle caratteristiche, è solubile a caldo in ligroina, poco a freddo. Si scioglie bene in acido acetico, cloroformio e benzolo, è molto solubile a caldo in alcool, meno a freddo, solubilissima in alcool metilico, solfuro di carbonio ed etere, più ancora in etere acetico. Il punto di fusione sale dopo ripetute cristallizzazioni a  $96^\circ$ .

Facendo agire il pentasolfuro di fosforo in soluzione di solfuro di carbonio sulla soluzione eterea della benzofenonossima e lasciando a sè il miscuglio alla temperatura ordinaria per parecchi giorni non si ha alcuna reazione, e dopo eliminata la maggior parte del solvente si ha la benzofenonossima inalterata.

2. *Passaggio dalla tiobenzanilide alla benzanilide.* — Per accertarmi dell'identità della sostanza, da me preparata, col tiobenzanilide ho voluto preparare, oltre il benzoilderivato che sarà descritto più sotto, la benzanilide per sostituzione dell'ossigeno allo zolfo.

Gr. 5 di tiobenzanilide si sciolgono in  $200 \text{ cm}^3$  di potassa al 10% ed alla soluzione si aggiungono gr. 8 di nitrato d'argento sciolto nella più piccola quantità di acqua. Si fa bollire per circa mezz'ora e dopo raffreddamento si filtra. La massa nera rimasta nel filtro si estrae con poco alcool bollente: per raffreddamento della soluzione alcoolica si separa la benzanilide in squame fondenti a  $158^\circ$ .

Gr. 0,1042 di sostanza diedero gr. 0,3027 di  $\text{CO}_2$  e gr. 0,0496 di  $\text{H}_2\text{O}$

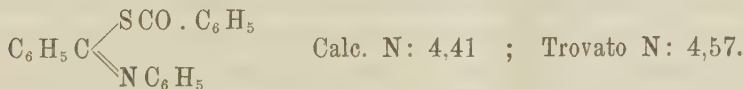
$\text{C}_{13}\text{H}_{11}\text{ON}$  Calcolato C: 78,18 H: 5,58.

Trovato 79,22 " 5,27.

3. *Preparazione del derivato benzoilico.* — Gr. 10 di tiobenzanilide si sciolgono in  $100 \text{ cm}^3$  di potassa al 10%, alla soluzione filtrata si aggiun-

gono gr. 4 di cloruro di benzoile e si agita per un quarto d'ora il miscuglio. Si separa così una sostanza rossa che solidifica rapidamente. Si cristallizza da poco alcool metilico e si ottengono dei cristalli prismatici ben conformati, di un bel color rosso-rubino, fondenti a 108° come trovò Jamieson (loc. cit.). Anche le soluzioni di questo derivato benzoilico sono fortemente colorate in rosso-rubino.

Gr. 0,2198 di sostanza diedero cm<sup>3</sup> 9,2 di N (29°,760 mm.).



La soluzione in alcool metilico abbandonata a sè per alcuni giorni si scolora completamente e per evaporazione lascia depositare un miscuglio di acido benzoico e di tiobenzanilide.

La saponificazione avviene però più prontamente riscaldando il derivato benzoilico con potassa alcoolica:

gr. 15 di sostanza si sciolgono 100 cm<sup>3</sup>. di potassa alcoolica (7 %) e la soluzione si fa bollire a bagno-maria fino a completa scomparsa della colorazione rossa. Il liquido si filtra se occorre, e si diluisce con 400 cm<sup>3</sup> di acqua. Con una corrente di anidride carbonica si precipita quindi la tioanilide che si cristallizza successivamente dall'alcool e dalla ligroina.

Gr. 0,2543 di sostanza diedero gr. 0,6610 di CO<sub>2</sub> e gr. 0,1281 di H<sub>2</sub>O.



Il punto di fusione fu riscontrato lo stesso: 96°.

4. *Preparazione del sale d'argento.* — Ad una soluzione alcoolica satura della tioanilide si aggiunge a poco a poco una soluzione al 10 % di nitrato d'argento finchè il precipitato bianco, che immediatamente si forma, si scioglie. Quando questo precipitato non si scioglie più, si filtra rapidamente, e quasi subito cominciano a separarsi degli aghetti gialli lunghi del sale d'argento. Questo composto non si può cristallizzare da nessun solvente. Per l'analisi si lavò accuratamente con alcool e si seccò su acido solforico nel vuoto. All'analisi non si ebbero infatti dei numeri troppo concordanti.

1. Gr. 0,1718 di sostanza diedero gr. 0,3295 di CO<sub>2</sub> e gr. 0,0725 di H<sub>2</sub>O.

2. Gr. 0,1490 di sostanza diedero gr. 0,0266 di Ag.

(C<sub>13</sub>H<sub>11</sub>NS)<sub>2</sub> · AgNO<sub>3</sub>.      Calcolato C: 52,36 ; H: 3,69 ; Ag: 18,07.  
Trovato    "    52,30 ;    "    4,68 ;    "    17,85.

Il sale è poco solubile in alcool, insolubile in etere, solfuro di carbonio, ligroina, benzolo ed acqua, solubile in cloroformio ed etere acetico, solubilissimo in alcool metilico. Non cristallizza da nessun solvente. Imbrunisce a 105° e fonde a 115° con deflagrazione. Fondendo in un tubo d'assaggio una certa quantità di sale, si ha svolgimento di ipoazotide e formazione di solfuro di argento.

5. *Riduzione.* — 1 gr. di tiobenzanilide si scioglie in 60 cm<sup>3</sup> di potassa al 20 %, ed alla soluzione bollente si aggiungono a piccole proporzioni per volta 2 gr. di polvere di zinco. Quasi subito si separa un olio giallognolo; si fa bollire ancora per 10 minuti e dopo raffreddamento si estrae con etere. All'olio rimasto dopo evaporato l'etere si aggiungono 100 cm<sup>3</sup> cubici di acido cloridrico diluito, e si distilla col vapor d'acqua. L'olio che passa è benzaldeide come si può stabilire dall'odore, e dal fenilidrazone che fonde a 156° (un miscuglio di parti uguali di fenilidrazone dell'aldeide benzoica e di questo idrazone fonde parimenti a 156°), che arrossa alla luce e che, sciolto in pochissimo alcool bollente, dà con una soluzione alcoolica concentrata bollente di acido picrico il picrato caratteristico fondente a 117° <sup>(1)</sup>. Da un grammo di tiobenzanilide si ottennero gr. 0,4 di idrazone, ossia gr. 0,21 di benzaldeide: il rendimento è del 42 %.

*Fisiologia vegetale. — Ricerche sulla vitalità e la digestione dell'albumine delle Graminacee* <sup>(2)</sup>. Nota di DIANA BRUSCHI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Per risolvere la questione, se il materiale di riserva contenuto nell'endosperma dei semi amiliferi venga durante la germinazione digerito esclusivamente dagli enzimi segregati dall'embrione, o se le cellule stesse dell'albumine ritornino in attività vitale e sciolgano da sè le sostanze nutritizie, si sono battute due vie.

L'una consisteva nel cercare se l'embrione secerne realmente enzimi, l'altra se esso possa sostentarsi da sè anche se strappato all'endosperma e provvisto di alimento.

Io non posso riportare qui tutta la letteratura concernente l'argomento, la cui critica comparirà nel lavoro esteso <sup>(3)</sup>, e mi limiterò a ricordare che, mentre Pfeffer <sup>(4)</sup>, insieme con i suoi allievi Hansteen <sup>(5)</sup> e Puriewitsch <sup>(6)</sup>,

<sup>(1)</sup> G. 36, 2<sup>a</sup>, 94.

<sup>(2)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia del R. Istituto Botanico di Roma.

<sup>(3)</sup> Negli Annali di Botanica del Prof. Pirotta.

<sup>(4)</sup> Ber. Sächs. Ges., 1893, pag. 412 e *Pflanzenphysiologie*, II<sup>a</sup> ed., vol. I, pagg. 518-603 (1897).

<sup>(5)</sup> Flora, 1894, supplem., pag. 419.

<sup>(6)</sup> Jahrbücher f. wiss. Botan., vol. XXXI, pag. 1 (1887).

ritiene che gli endospermi amiliferi e cornei siano vivi e si vuotino da sè durante la germinazione al pari di quelli oleosi, Brown con i suoi collaboratori Morris <sup>(1)</sup> ed Escombe <sup>(2)</sup> sostiene che sono morti e che gli enzimi, i quali sciolgono le sostanze di riserva in essi accumulate, provengono dall'embrione, anzi essenzialmente dall'epitelio dello scutello, di quel cotiledone metamorfosato caratteristico delle graminacee <sup>(3)</sup>.

La questione è resa più imbrogliata dal fatto che altri autori i quali, come Linz <sup>(4)</sup> e Grüss <sup>(5)</sup> hanno sperimentato esclusivamente col frumento, hanno potuto constatare che nell'endosperma di questa pianta la vitalità non è spenta durante la germinazione, mentre i suddetti inglesi si appoggiano ad esperienze eseguite coll'orzo.

Anche la teoria di Haberlandt <sup>(6)</sup> secondo cui le cellule del così detto strato od aleurona, che sta alla periferia dell'albumo delle graminacee, sarebbero le cellule secernenti la diastasi che scioglie l'amido dell'endosperma stesso, teoria che le esperienze di Linz, Brown e Morris, Hansteen, Puriewitsch hanno abbattuto, ha portato non poca confusione in questo campo.

Per l'albumo corneo del Dattero, Pond <sup>(7)</sup> ha già provato che l'autodigestione è impossibile, in opposizione a quanto sosteneva Puriewitsch. Occorre dunque la presenza dell'embrione per disciogliere l'emicellulosa, che costituisce la riserva di questo albumo. Pond però non ha ricercato in qual modo l'embrione riesca ad ottenere questo scopo.

Le mie ricerche hanno per punto di partenza le esperienze di Puriewitsch che ho accuratamente ripetute.

In seguito poi mi sono valso di tutte le possibili risorse della Fisiologia macroscopica e cellulare per stabilire se e quanta vitalità si abbia negli endospermi delle quattro graminacee: mais, frumento, orzo e segale.

Incominciai prima con lo studiare lo svotamento degli endospermi di queste quattro graminacee per mezzo della germinazione per compararlo con quanto avveniva in semi posti nelle medesime condizioni di germinazioni, ma privati dello embrione e dello scutello, ripetendo così le esperienze di Hansteen e Puriewitsch.

<sup>(1)</sup> Brown and Morris, Journal of the chemical Society, vol. LVII, pag. 458 (1890).

<sup>(2)</sup> Brown and Escombe, Proceed. Royal Society, vol. LXII, pagg. 3-34 (1898).

<sup>(3)</sup> *Descrizione citologica dell'epitelio secernente dello scutello* in Reed, Annals of Botany, vol. XVIII, pag. 267 (1904), e in Sargent e Robertson, Annals of Botany, vol. XIX, pag. 115 (1905).

<sup>(4)</sup> Landwirtsch. Jahrbücher, vol. XXIX, pag. 257 (1896).

<sup>(5)</sup> Berichte d. bot. Ges., vol. XI, pag. 286 (1893); Jahrbücher f. wiss. Botanik, vol. XXVI, pag. 424 (1894); Beitr. zur wiss. Botanik, vol. I, pag. 295 (1895); Landwirtsch. Jahrbücher, vol. XXV, pag. 431 (1896); Jahrbücher. wiss. Bot., vol. XXX, pag. 644 (1897).

<sup>(6)</sup> Berichte d. Bot. Ges., vol. VIII, pag. 40 (1890); *Physiologische Pflanzenanatomie*, III ed. pag. 444 (1904).

<sup>(7)</sup> Annals of Botany, vol. XX, pag. 181 (1906).

In questo caso i semi tenuti in bagno per quarantotto ore furono immersi in  $\text{CuSO}_4$  al 3% per disinfettarli, quindi privati dell'embrione e dello scutello furono posti in camera di Koch su colonnette o su forme di gesso, sterilizzate e immerse sia in acqua sterile, sia in  $\text{H}^3\text{PO}_4$   $\frac{1}{1000}$  normale, pure sterile.

Le esperienze furono fatte e in aria libera e in atmosfera di cloroformio. I semi di tutte le esperienze venivano fissati, per ulteriori studi citologici, in vari liquidi fissatori.

Con questo procedimento ho potuto rilevare che nel seme di mais il cui endosperma è formato di una porzione periferica più ricca di protoplasma con consistenza e aspetto di tessuto corneo (glutinoso) e di una parte centrale più povera di protoplasma e del tutto farinosa, si ha un parziale svotamento dell'endosperma privato di scutello e di embrione, con distruzione completa dello strato farinoso o parte del glutinoso, corrosione fortissima dei grani d'amido, e diffusione di zucchero riducente e di altri prodotti di digestione (albumine) nei liquidi esterni. Le varietà di mais usate in queste esperienze furono: *Zea Mais romana*, *Mais quarantino*, affine al *cinquantino Mais* di Puriewitsch, *Z. Mais saccharata lilacina dulcis*, *Z. Mais saccharata rubra dulcis*.

I migliori risultati furono dati dal *Mais quarantino*.

Il massimo svotamento si aveva verso il 16°-18° giorno, tempo corrispondente al periodo normale coll'embrione.

Le esperienze comparative di endospermi posti in aria libera e in atmosfera di cloroformio dimostrarono che il cloroformio, se non arresta completamente lo svotamento, lo ostacola rallentandolo notevolmente. Poi volli vedere se per la produzione di un enzima attivo fosse necessaria la vitalità delle cellule dell'endosperma stesso, e perciò triturai separatamente aggiungendo acqua e glicerina oppure acido cloridrico  $\frac{1}{100}$  normale, una massa di endospermi isolati e d'altra parte i rispettivi scutelli con gli embrioni, ed abbandonai all'autolisi asettica in presenza di cloroformio le poltiglie ottenute.

Potei notare, che alla temperatura di 18°-20° C, si ha in essi un notevole aumento di amilasi, anche entro pochi giorni; p. es. mentre l'azione della poltiglia su soluzione al 2% di amido solubile subito dopo la triturazione dava per gli endospermi solo tracce di zucchero, dopo 17 giorni dava già mg. 219 di  $\text{CuO}$  = 89,6 mq. di glucosio o 130,4 mg. di maltosio per 5 cmc. di poltiglia; e per l'estratto di scutelli con embrioni, mentre nella prima prova l'amilasi dava 42,5 mg. di  $\text{CuO}$ , nell'ultima dava mg. 584.

In una seconda esperienza, l'esame fatto immediatamente dopo la triturazione dette per l'amilasi degli endospermi mg. 20 di  $\text{CuO}$  e dopo 7 giorni mg. 98,8, per l'amilasi degli scutelli con gli embrioni dette nella prima

prova mg. 9, e dopo 7 giorni mg. 141,9 (<sup>1</sup>). Così non potendosi ritenere l'aumento di diastasi che i varii autori hanno osservato avvenire nell'endosperma, come una prova della vitalità delle cellule, poichè questo aumento si può notare anche in condizioni in cui la vitalità manca certamente, si tentò di risolvere la questione con alcuni metodi della Fisiologia cellulare.

Si adoperò prima il metodo plasmolitico, il quale dette un risultato molto incerto, perchè la quantità del materiale di riserva accumulato nelle cellule impedisce un'osservazione sicura; ma un accenno di plasmolisi parve aversi nelle cellule dello strato corneo del seme. Adoperando invece il metodo delle colorazioni vitali col violetto di metile, o col bleu d'anilina, si ottenne una immediata colorazione delle cellule dello strato farinoso e di quelle più lontane dalle cellule ad aleurona, mentre non si colorarono quelle dello strato corneo, in ispecie quelle prossime alle cellule ad aleurona, accennando così ad una gradazione fra le cellule vive, che sarebbero quelle più vicine alla parte periferica del seme, e le cellule morte che si troverebbero nella parte centrale.

Lo studio citologico del nucleo, che fu fatto tentando di colorarlo con metodi diversi, mostrò che i nuclei dello strato dell'endosperma più vicino allo strato ad aleurona fissano maggiormente il verde di jodio, il verde di metile, l'eosina; e che sono un po' meno deformati e più piccoli, mentre la deformazione e la poca colorabilità aumentano quando si passa nella porzione farinosa. Se con ciò non si può stabilire che i nuclei siano addirittura morti, certo è che essi non assorbono più i colori che tingono normalmente le cellule giovani e piene di vitalità. Il nucleo si presenta lobato, vacuolizzato e accusa decrepitezza, la quale sembra aumentare dalla periferia al centro dell'albuma.

Ripetute tutte queste esperienze per l'orzo (*Hordeum distichum*), potetti concludere che nell'endosperma di orzo si ha uno svtamento se non completo molto maggiore che nel mais, che l'acido fosforico  $\frac{1}{1000}$  normale agevola lo svtamento dell'endosperma come nel Mais, mentre il cloroformio ha un'azione ostacolante assai minore che sull'endosperma di mais: ciò che indica di già come la vitalità dell'albuma di orzo debba essere minore che nel frumentone.

È da notarsi che Puriewitsch aveva eseguito le sue esperienze di narcosi solo sul *cinquantino Mais*. — Del resto anche lo svtamento è nell'orzo assai più energico che nel mais. e siccome le pareti cellulari vengono attaccate anche prima dell'amido, difficilmente si potrebbe ammettere che un tessuto che non esiste più come tale, disciolga per propria attività vitale le sue riserve; convinzione che già aveva conquistato la mente di Brown e Morris.

Feci quindi anche qui la prova per vedere se esistesse in questi endospermi un pro-enzima che diventi attivo anche in autolisi asettica a bassa

(<sup>1</sup>) Sul metodo di determinazione dell'amilasi rimando al lavoro esteso.

temperatura: e venni alla conclusione che difatti esiste un pro-enzima che diventa attivo in presenza di O libero o di un acido debole senza bisogno che queste cellule conservino alcuna traccia di vitalità. Infatti, mentre subito dopo la triturazione la poltiglia degli endospermi dette per l'amilasi mg. 3 di CuO, dopo 22 giorni di macerazione asettica dette mg. 73,2; mentre la poltiglia di scutelli con gli embrioni dette nella prima prova mg. 4, nell'ultima mg. 80,3 di CuO.

Con questo non voglio dire che tutte le cellule dell'endosperma di orzo debbano essere morte fin dal principio. Le ricerche cellulari sulla vitalità dimostrarono che se un residuo di vitalità esiste in questo endosperma va ricercato solo nello strato posto immediatamente sotto l'aleurona, perchè solo in esso si può, sebbene con sforzo a causa del materiale di riserva, riscontrare un accenno alla plasmolisi, e perchè solo in esso si possono trovare, con le diverse colorazioni tracce di *sostanza nucleare*, sebbene non si possa parlare di un nucleo nettamente distinto.

Per il *frumento* potei ottenere uno svotamento completo dell'endosperma nelle esperienze all'aria libera; in quelle in atmosfera di cloroformio invece si ebbe un arresto nello svotamento, non solo, ma anche un indurimento nel seme provando con ciò che il cloroformio arresta tanto l'azione citasica come l'azione amilasica. Le ricerche cellulari e citologiche pel frumento mostrerebbero che le cellule del suo albume non riacquistano vitalità durante la germinazione, poichè non si ebbe nelle cellule amilifere alcun accenno a plasmolisi; nè le colorazioni vitali dettero alcun accenno a residuo di vitalità, nè si potè in alcun modo, con differenti metodi di fissazione e colorazione, mettere in evidenza il nucleo, mentre si ha la colorazione netta di esso nell'endosperma in via di formazione. Rimane però il fatto che l'albume si vuota senza l'embrione e che il cloroformio ostacola assai questo svotamento.

Ma il discioglimento dei materiali di riserva non prova la vitalità del tessuto perchè nel seme in riposo ho potuto con le solite esperienze constatare che questo contiene un pro-enzima, che anche in autolisi, per azione dell'O e di acidi diluiti si trasforma in enzima attivo. Infatti, mentre nella prima prova dell'amilasi ebbi solo tracce di CuO, dopo 20 giorni (a 18° C.) ebbi mg. 123,92 per 5 emc. di poltiglia degli endospermi; mentre per gli scutelli con gli embrioni nella prima prova ebbi solo tracce, nell'ultima mg. 40,26 di CuO.

È poi interessante che il cloroformio ostacola nell'albume intatto non solo la decomposizione dell'amido, ma anzitutto lo scioglimento delle pareti; si dovrebbe quindi ammettere che la citasi sia prodotta da cellule vive. Siccome però le cellule dell'endosperma sono da ritenere in massima parte morte per le ragioni suddette, così non resterebbe che ammettere che la fabbrica della citasi risieda nelle cellule ad aleurona, o al più nello strato amilifero immediatamente sottostante.

Infine per la *Segale romana* potei avere, col solito metodo, uno svotamento completo dell'endosperma, privo dell'embrione, con abbondante diffusione nel liquido esterno di zuccheri riducenti e di altri prodotti di digestione (albumine); ma fin dal primo momento si ebbe lo sfasciamento completo del tessuto amilifero, per separazione delle singole cellule. Il cloroformio non aveva azione alcuna sullo scioglimento dell'amido, nè delle pareti, nè sullo svotamento dell'endosperma, perchè sebbene i semi prendessero una tinta più bruna e si indurissero un poco, ottenni la solita separazione delle cellule e forte produzione di zuccheri riducenti, che diffondevano nel liquido esterno, e quindi questi endospermi dovrebbero essere morti fino alle cellule ad aleurona. Siccome il distacco delle cellule precede lo scioglimento dell'amido, così non si può ascrivere quest'ultimo processo ad un'attività vitale delle cellule medesime; però, mentre nell'orzo prima viene sciolta l'emicellulosa poi quasi subito anche la cellulosa, qui da prima scompare la sostanza della lamella primaria, quella che tiene cementate le cellule fra loro (probabilmente sostanze pectiche) e solo in istato molto avanzato, quando l'amido è quasi tutto sciolto, anche la membrana di cellulosa ed i suoi spessimenti di emicellulosa vengono idrolizzati e compaiono.

Siccome Puriewitsch non parla affatto di questi fenomeni che egli ha del resto sorvolato anche per l'orzo ed il frumento, così sorse il dubbio che la *Segale romana* si comportasse diversamente dalle altre specie di segale. Per fortuna il prof. Pirotta ha potuto farmi pervenire subito le più svariate qualità di Segale da diversi Istituti Botanici italiani ed esteri, e non solo di Segale cereale ma anche di Segale montanum: [*Secale cereale* del Giardino Botanico di Parigi, *Secale cereale* del Giardino Botanico di Lione, *Secale cereale* di Liegi, *Secale cereale aestivum* annuale della Stazione dei semi di Zurigo, *Secale cereale perenne* di Zurigo, *Secale cereale* del Giardino Botanico di Marburg, *Secale montanum* Grüss di Parigi, *Secale montanum* di Lione, *Secale cereale* di Utrecht]. In tutte ho potuto constatare il medesimo comportamento nello svotarsi degli endospermi, e il fenomeno del distacco delle cellule.

Allora feci delle esperienze per vedere se realmente nell'endosperma di segale esistesse un enzima citasico, e le esperienze mi dettero un risultato positivo, poichè gli estratti di endospermi di segale attaccavano e scioglievano rapidamente le pareti cellulari di sezioni di Lupino (tenute per diversi giorni immerse negli estratti).

Poichè fin dai primi momenti si ebbe lo sfasciamento del tessuto amilifero, si poteva concludere che in esso non vi è più traccia alcuna di vitalità, non di meno ripetei sulla segale gli studî cellulari e citologici. I risultati non fecero che affermarmi nella mia opinione. Nelle cellule dell'albumi di segale non si ha accenno a plasmolisi, nè è possibile con alcun mezzo porre in rilievo il nucleo.

Col metodo della colorazione vitale si ebbe immediatamente e perfettamente colorata tutta la porzione amilifera nell'endosperma.

L'auto-svotamento è prodotto anche qui da un pro-enzima che diventa attivo in presenza dell'aria o di un acido diluito. Infatti la poltiglia di endospermi in autolisi asettica nella prima prova dell'amilasi dette solo traccia di  $\text{CuO}$  mentre dopo 21 giorni ebbi mg. 129,93 per 5 cmc.; in quegli degli scutelli nella prima ebbi solo tracce, nell'ultima mg. 25,6 di  $\text{CuO}$ .

In conclusione, l'albumo amilifero delle graminacee studiate: mais, orzo, frumento e segale, può digerire sè stesso, però in grado molto diverso. Da ciò i risultati diversi ottenuti dai varî autori. L'auto-svotamento nelle diverse specie può avvenire senza bisogno della vitalità delle cellule amilifere, poichè la digestione dell'amido si compie per l'azione acceleratrice di un enzima, che per l'influenza degli acidi diluiti si forma a poco a poco da un pro-enzima che esiste nell'albumo del seme in riposo, e ciò anche quando si sia con mezzi meccanici tolta una vitalità possibile al tessuto di riserva.

Con ciò non è negata qualunque vitalità alle cellule dell'endosperma di queste graminacee, anzi i nostri studi conducono ad ammettere che la vitalità, la quale è certa per le cellule ad aleurona che si trovano alla periferia dell'albumo, sia conservata anche negli strati posti subito al di sotto dello strato aleuronico; ma che poi essa vada via via diminuendo fino a scomparire del tutto verso la parte centrale dell'albumo, come pure nella porzione attigua allo scutello. Ciò si vede chiaramente nel mais il cui albumo mostra nuclei ben netti, sebbene curiosamente deformati, nella porzione glutinosa che costituisce per così dire, lo strato corticale dell'albumo; mentre non si riesce più a metterli in evidenza nella porzione farinosa centrale che ne costituisce la polpa. Nell'orzo e nel frumento invece, se un resto di vitalità è rimasto nelle cellule amilifere, esso si deve rintracciare nello strato subito sottostante a quello delle cellule ad aleurona mentre tutta la massa maggiore dell'endosperma può considerarsi morta. Lo sfasciamento completo fin dai primi momenti della germinazione del seme di segale, mostra come quivi l'albumo sia completamente morto.

Quindi le discordanze esistenti nei dati dei varî autori che studiarono questo argomento provengono molto probabilmente dall'aver essi usato nelle loro esperienze diverse specie di graminacee: così Puriewitsch, Grüss e Linz, che hanno sperimentato a preferenza con frumentone, non hanno torto se in complesso ammettono che il suo albumo sia vivo, mentre Brown e i suoi collaboratori hanno ragione quando sostengono che l'albumo di orzo è un "mazzino morto" di riserve alimentari.

V. C.